Bases teóricas del cálculo antisísmico de estructuras de varios grados de libertad

Ing. Arturo Arias S.

Resumen: Se exponen aquellas partes de la teoría general de las vibraciones que pueden servir de base al cálculo antisísmico de estructuras de varios grados de libertad. En el caso de estructuras lineales conservativas, el problema es reducido al de estructuras lineales conservativas de un grado de libertad (oscilador lineal simple). Este último caso ha sido tratado en un artículo anterior (Ref. 1). Se hacen ver las limitaciones de la teoría y el modo de salvarlas cuando el amortiguamiento es pequeño.

1. Oscilaciones de pequeña amplitud de los sistemas conservativos. Generalidades. Un sistema mecánico se dice conservativo, si el trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre él depende solamente de las coordenadas de las posiciones inicial y final. En tal caso, las fuerzas pueden derivarse de una función potencial V (energía potencial), función de las coordenadas q del sistema. La función V contiene una constante aditiva, que puede elegirse arbitrariamente.

Empezaremos por estudiar primero las oscilaciones de pequeña amplitud de un sistema conservativo, en torno de una posición de equilibrio estable. Más adelante diremos algunas palabras sobre los sistemas no conservativos.

Elegiremos las coordenadas de tal modo que en la posición de equilibrio, en torno de la cual tiene lugar la oscilación, se tenga

$$\left.\begin{array}{r} q_i = 0 \\ V(q_i) = 0 \end{array}\right\} , \; i = 1 , 2 , \ldots , n) \; ;$$

Desarrollando V en serie de Taylor en torno del punto definido por las primeras n ecuaciones, se tiene

$$V = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} q_1^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} q_2^2 + \ldots + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \, \partial q_2} q_1 q_2 + \ldots \right) + \ldots \quad (1)$$

ecuación en la cual las derivadas deben avaluarse en el punto ya mencionado.

Los términos de grado 0 y de grado 1 en las q no aparecen, por la forma en que se ha elegido la constante arbitraria contenida en V, y porque, siendo $q_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ una posición de equilibrio, las primeras derivadas de V respecto de las q son todas nulas.

Si se desprecian los términos de orden superior al segundo, se puede escribir

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \, \partial q_j} q_i \, q_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \, q_i \, q_j \qquad (2)$$

Se ha puesto

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \, \partial q_j} = k_{ij} \qquad (3)$$

luego,

$$k_{ij} = k_{ji} \qquad (4)$$

Los k son constantes, ya que las derivadas se avalúan en la posición de equilibrio.

Hay que hacer notar que si el sistema mecánico es lineal, la hipótesis de pequeñas amplitudes es supérflua, puesto que en tal caso la expresión (1) no contiene términos de orden superior al segundo.

Por razones obvias, sólo consideraremos sistemas estables. La función V debe ser, entonces, mínima en la posición de equilibrio y, por lo tanto, es positiva en todo punto, salvo en el origen, donde se anula. Con mayor rigor, podemos decir que se puede elegir un entorno del punto $q_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, tal que V sea positiva en todo punto del entorno, salvo el origen, donde será nula.

Las fuerzas que actúan sobre el sistema se pueden obtener derivando la expresión del potencial:

$$- Q_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} K_i \, q_j \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \quad (5)$$

Si se multiplican estas n ecuaciones por $q_1, q_2 \ldots, q_n$, respectivamente y se suman resulta, después de dividir por 2:

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Q_i \, q_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i} q_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \, q_i \, q_j = V \qquad (6)$$

Desde el punto de vista físico la ecuación anterior tiene el siguiente significado: los Q son las fuerzas debidas a la deformación definida por las coordenadas q; las llamaremos **fuerzas de restitución**, los coeficientes k los llamaremos **rigideces**. Por lo tanto, las fuerzas exteriores capaces de mantener la deformación $q_1, q_2, \ldots, q_n$ son $- Q_1, - Q_2, \ldots, - Q_n$. La ecuación (6) expresa entonces que si el sistema se mueve bajo la acción de fuerzas exteriores desde la posición de equilibrio hasta la posición arbitraria $q_1, q_2, \ldots, q_n$, su energía potencial aumenta en una cantidad igual al trabajo de esas fuerzas.

Consideremos, ahora, la energía cinética del sistema. La energía cinética T, es una función cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas

$\dot{q}_i$, en la cual los coeficientes son, en general, funciones de las coordenadas. Podemos escribir:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \qquad (m_{ij} = m_{ji}) \qquad (7)$$

Reemplacemos las funciones m_{ij} por sus valores para $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$; es decir, por los primeros términos de sus respectivos desarrollos en serie en torno de la posición de equilibrio. Las constantes m_{ij} las llamaremos **parámetros de inercia** del sistema.

Tratándose de un sistema lineal, las m son constantes y la hipótesis de amplitudes pequeñas es supérflua, ya que en tal caso el segundo miembro de (7) no contiene términos de orden superior al segundo.

En buenas cuentas, las expresiones de V y T con coeficientes constantes, son exactas para los sistemas lineales. Para el caso de sistemas no lineales, el problema se ha linearizado en la hipótesis de pequeñas amplitudes.

Como T no depende de las coordenadas:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = O \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

luego, para pequeñas oscilaciones, las ecuaciones de Lagrange toman la forma más simple

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (8)$$

o en forma más explícita:

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \ddot{q}_j = -\sum_{j=1}^{n} k_{ij} q_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (9)$$

Los términos de las ecuaciones (9) que contienen k_{ij} $(i \neq j)$ se llaman **términos de acoplamiento estático**; mientras que los que contienen m_{ij} $(i \neq j)$ reciben el nombre de **Términos de acoplamiento dinámico.**

El significado físico de los términos de acoplamiento estático es evidente: el el término $-k_{ij} q_j$ representa la contribución de la coordenada o deformación q_j a la fuerza Q_i.

Para comprender el significado físico de los términos de acoplamiento dinámico, recordemos que $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ se llama la componente i ésima del impulso generalizado. Entonces el término $m_{ij} \dot{q}_j$ es la contribución de la componende q_i de la velocidad a la i ésima componente del impulso generalizado.

A continuación consideraremos sistemas con acoplamiento estático únicamente. Luego volveremos sobre el caso de acoplamiento dinámico.

2. **Oscilaciones de un sistema conservativo con acoplamiento estático.** Se tendrá por hipótesis:

$$m_{ij} = 0 \quad , \quad (i \neq j); \qquad m_{ii} = m_i \qquad (10)$$

y las ecuaciones de Lagrange son:

$$m_i \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^{n} k_{ij} q_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (11)$$

Investiguemos bajo qué condiciones el sistema de ecuaciones (11) admite soluciones del tipo:

$$q_i = A_i \operatorname{sen} (\omega t + \epsilon) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (12)$$

substituyendo en (11) resulta el sistema de ecuaciones algebráicas homogéneas en las incógnitas A:

$$m_i A_i \omega^2 = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} A_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (13)$$

o bien

$$m_i q_i \omega^2 = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} q_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (13)'$$

Para que este sistema admita solución, fuera de la trivial

$$A_i = O \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

es preciso que su determinante sea nulo; es decir, que:

$$\begin{vmatrix} k_{11} - m_1 \omega^2 & k_{12} \ldots\ldots\ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} - m_2 \omega^2 \ldots\ldots & k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} \ldots\ldots & k_{nn} - m_n \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (14)$$

Esta es una ecuación algebráica de grado n en ω^2; se la llama **ecuación de frecuencia**. Se puede demostrar (Refs. 2 y 3) que si el equilibrio es estable, es decir, si V es esencialmente positiva, las raíces de esta ecuación en ω^2 son todas positivas. Excluiremos el caso de raíces nulas o dobles (*). Las n raíces de (14) las designaremos por $\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_n^2$. Sustituyendo, sucesivamente estas raíces en las ecuaciones (13) o (13)' se obtienen n conjuntos de valores para los A, o para los q. Cada conjunto corresponde a una de las frecuencias $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. La solución general del sistema diferencial (11) es, entonces:

$$q_i = \sum_{r=1}^{n} A_i^r \operatorname{sen} (\omega_r t + \epsilon_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (15)$$

Los A_i^r no quedan completamente determinados por ser (13) un sistema homogéneo. Los A de un mismo conjunto (los que corresponden a un mismo r) se pueden multiplicar por una misma constante arbitraria; esta constante puede ser diferente para distintos r.

Llamaremos **oscilación principal** o **modo principal de oscilación** a una solución de (11) que corresponde a un valor fijo de r. Por ejemplo:

(*) El caso de raíz nula no puede presentarse en estructuras con ligazones exteriores suficientes. El caso de raíz múltiple no hace excepción a lo expuesto más adelante (Refs. 2 y 3).

$$q_1^1 = A_1^1 \text{ sen } (\omega_1 t + \epsilon_1)$$
$$q_2^1 = A_2^1 \text{ sen } (\omega_1 t + \epsilon_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q_n^1 = A_n^1 \text{ sen } (\omega_1 t + \epsilon_1)$$

es una oscilación principal; aquella que corresponde a $r = 1$.

Resulta, entonces, que con las hipótesis hechas (ausencia de raíces dobles o nulas), el número de oscilaciones principales es igual al número de grados de libertad del sistema (sistemas holonomos). (*).

Toda oscilación principal es armónica simple. En un modo principal cualquiera, las coordenadas del sistema varían armónicamente con el tiempo, con la misma frecuencia y con la misma fase .

Las frecuencias de las oscilaciones principales se llaman también **frecuencias naturales** del sistema o frecuencias propias. La frecuencia más baja, que corresponde a la oscilación de período más largo, se llama **frecuencia fundamental** y el modo correspondiente **modo fundamental.** Se acostumbra ordenar los modos principales en orden creciente de frecuencias y llamados primero, segundo, tercer ..... modo.

3. **Ortogonalidad de las oscilaciones principales.** Demostraremos ahora una propiedad de las oscilaciones principales, que es de la mayor importancia para el cálculo práctico de las frecuencias naturales y el tratamiento de las oscilaciones forzadas.

Consideremos dos oscilaciones principales de frecuencias ω_r y ω_s. Los coeficientes A_i^r A_i^s $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de estos dos modos satisfacen las ecuaciones (13); es decir:

$$\left.\begin{aligned} m_i A_i^r \omega_r^2 &= \sum_{j=1}^{n} k_{ij} A_j^r \\ m_i A_i^s \omega_s^2 &= \sum_{j=1}^{n} k_{ij} A_j^s \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (16)$$

Multipliquemos las n ecuaciones del primer renglón por A_i^s y las n del segundo por A_i^r y sumemos, separadamente, las n ecuaciones que se obtienen en cada caso:

$$\omega_r^2 \sum_{i=1}^{n} m_i A_i^r A_i^s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} A_j^r A_i^s$$

$$\omega_s^2 \sum_{i=1}^{n} m_i A_i^s A_i^r = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} k_{ij} A_i^s A_i^r$$

(*) El estudio de las oscilaciones de pequeña amplitud de un sistema no holonomo con n coordenadas independientes se reduce al de las vibraciones de poca amplitud de un sistema holonomo de n-m grados de libertad, en que m es el número de ligazones no holonomas (Ref. 3, pp. 221-2).

Los segundos miembros de estas ecuaciones son iguales. Esto se ve inmediatamente intercambiando los índices i, j y aprovechando la ecuación (4). Se tiene, entonces:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \sum_{i=1}^{n} m_i A_i^r A_i^s = 0$$

Pero, por hipótesis, $\omega_r \neq \omega_s$; luego

$$\sum_{i=1}^{n} m_i A_i^r A_i^s = O \qquad r \neq s \qquad (17)$$

Esta ecuación se conoce como relación de ortogonalidad entre los modos principales r y s.

Hay que observar que la demostración anterior descansa en las condiciones $k_{ij} = k_{ji}$ para todo i y j. Esto es sólo válido para sistemas de fuerzas que puedan derivarse de un potencial. Por lo tanto la ortogonalidad de los modos principales es una propiedad de los sistemas con energía potencial. No vale, por ejemplo, para un sistema no conservativo.

4. **Expresiones de la energía cinética y de la energía potencial de un sistema conservativo con acoplamiento estático.** Se pueden encontrar expresiones muy compactas de la energía cinética y de la energía potencial de los sistemas mencionados en el subtítulo cuando se aprovechan las relaciones de ortogonalidad recién establecidas.

En la hipótesis de acoplamiento estático —ecuaciones (10)— la expresión de la energía cinética se reduce a:

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{q}_i^2$$

y sustituyendo el valor de $\dot{q}_i$ sacado de (15).

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} m_i A_i^r A_i^s \omega_r \omega_s \cos(\omega_r t + \epsilon_r) \cos(\omega_s t + \epsilon_s)$$

En esta sumatoria aparecen términos en $\omega_r \omega_s$. La suma de estos términos es:

$$\omega_r \omega_s \cos(\omega_r t + \epsilon_r) \cos(\omega_s t + \epsilon_s) \sum_{i=1}^{n} m_i A_i^r A_i^s$$

Pero, en virtud de la ortogonalidad de los modos principales, la suma recién escrita es nula si $r \neq s$. Luego:

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} m_i (A_i^r)^2 \omega_r^2 \cos^2(\omega_r t + \epsilon_r) \qquad (18)$$

Podemos encontrar una expresión aún más breve, introduciendo la notación siguiente: pongamos

$$c_r^2 M_r = \sum_{i=1}^{n} m_i (A_i^r)^2 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \qquad (19)$$

La expresión de la energía cinética se reduce a

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} M_r c_r^2 \omega_r^2 \cos^2 (\omega_r t + \epsilon_r) \qquad (20)$$

Se podría poner todavía:

$$\xi_r = c_r \operatorname{sen} (\omega_r t + \epsilon_r) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \qquad (21)$$

con lo cual

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} M_r \dot{\xi}_r^2 \qquad (22)$$

Según (20), la energía cinética resulta ser la suma de las energías cinéticas de n puntos materiales de masas M_r ($r = 1, 2, \ldots, n$) que se mueven con movimientos armónicos simples de amplitud c_r y de frecuencia circular ω_r.

Veamos ahora la energía potencial.

Substituyendo en (6) las expresiones de q_i, q_j obtenidas en (15)

$$V = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_r \sum_s k_{ij} A_i^r A_j^s \operatorname{sen} (\omega_r t + \epsilon_r) \operatorname{sen} (\omega_s t + \epsilon_s)$$

Pero, según (13)

$$\sum_{j=i}^{n} k_{ij} A_j^s = m_i A_i^s \omega_s^2$$

luego

$$V = \frac{1}{2} \sum_i \sum_r \sum_s m_i A_i^r A_i^s \omega_s^2 \operatorname{sen} (\omega_r t + \epsilon_r) \operatorname{sen} (\omega_t + \epsilon_s)$$

y aprovechando la propiedad que tienen los modos principales de ser ortogonales entre sí

$$V = \frac{1}{2} \sum_i \sum_r m_i (A_i^r)^2 \omega_r^2 \operatorname{sen}^2 (\omega_r t + \epsilon_r) \qquad (23)$$

o sea, con la notación (19),

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} M_r c_r^2 \omega_r^2 \operatorname{sen}^2 (\omega_r t + \epsilon_r) \qquad (24)$$

Lo que todavía puede escribirse

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} M_r \omega_r^2 \xi_r^2 \qquad (25)$$

Según la ecuación (24), la energía potencial también ha quedado descompuesta en una suma de cuadrados; cada uno de los términos de la suma corresponde a la energía potencial de un oscilador simple de masa M_r, frecuencia circular ω_r y que oscila con amplitud c_r. Las constantes elásticas o rigideces de dichos osciladores están dadas por

$$K_r = M_r \omega_r^2 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \qquad (26)$$

Como el sistema mecánico queda perfectamente especificado cuando se conocen su energía cinética y su energía potencial (sistema conservativo), resulta que el movimiento del sistema se conocerá en todo su detalle, si se conoce el movimiento de cada uno de los osciladores simples ya mencionados. En otras palabras: hemos logrado descomponer el sistema en osciladores lineales simples; estos osciladores son independientes unos de otros, en el sentido que la energía cinética total del sistema y la energía potencial del sistema pueden obtenerse por simple adición de las energías de los osciladores: no hay, por lo tanto, transferencia de energía entre los osciladores.

5. **Estructura lineal de varios grados de libertad, solicitada por temblor.** Hasta aquí los M_r están, en cierto modo, indeterminados, ya que en la ecuación (19) aparece además un factor c_r, también por determinar, y que representa la amplitud del modo r.

En la teoría general de las vibraciones se procede a elegir los M_r por una **condición de normalización** que conduce a expresiones particularmente simples de T y de V.

Aquí elegiremos los M_r de modo que el tratamiento del problema de los temblores resulte sencillo.

Llamaremos a la expresión

$$- m_i \ddot{q}_i$$

ésima componente de la fuerza de inercia generalizada. Se tratará de una verdadera fuerza de inercia si, por ejemplo, m_i es una masa y q_i una coordenada con dimensiones de longitud.

Impondremos a los M_r la condición de que

$$- \sum_{i-2}^{n} m_i \ddot{q}_i^r = M_r c_r \omega_r^2 \operatorname{sen} (\omega_r t + \epsilon_r), \ (r = 1, 2, \ldots, n) \qquad (27)$$

es decir, que la suma de las fuerzas de inercia para un modo dado (para un r dado), sea igual a la fuerza de inercia en el oscilador simple correspondiente.

Substituyendo en (27) la expresión de q_i^r

$$q_i^r = A_i^r \operatorname{sen} (\omega_r t + \epsilon_r) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

resulta, después de operaciones elementales,

$$M_r c_r = \sum_{i=1}^{n} m_i A_i^r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \qquad (28)$$

Eliminando c_r entre esta ecuación y la (19)

$$M_r = \frac{\left(\sum_i m_i A_i^r\right)^2}{\sum m_i \left(A_i^r\right)^2} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \ (29)$$

Las masas de los osciladores quedan así perfectamente determinadas. M_r no depende de los valores absolutos de los A_i^r sino sólo de las razones entre ellos. Estas razones se pueden calcular de las ecuaciones (13); una vez

conocidas, se conoce la forma geométrica del modo de vibrar, el valor de M_r y, por lo tanto, el valor de K_r obtenido de la ecuación (26). Hay que recordar que ω_r se conoce a partir de la ecuación de frecuencia (14).

Se ha logrado, entonces, descomponer toda estructura lineal conservativa en osciladores lineales simples. Cada uno de estos osciladores se puede tratar en la forma indicada en Ref. 1: conocido el espectro del temblor se puede calcular el esfuerzo de corte basal correspondiente a cada oscilador, y de aquí los esfuerzos en la estructura que corresponden al respectivo modo de oscilar. En un artículo próximo pensamos ilustrar el método con algunas aplicaciones.

Un problema por resolver es la forma en que se superponen los esfuerzos correspondientes a los distintos modos, lo cual depende de la naturaleza del movimiento del suelo. Por ahora, se puede proceder superponiendo, para cada pieza de la estructura, las solicitaciones tomadas en valor absoluto, con lo cual se está del lado de la seguridad.

6. **Estructuras con acoplamiento dinámico.** Hasta aquí hemos considerado sistemas con acoplamiento estático; es decir, la expresión de la energía potencial puede contener productos de coordenadas; no así la expresión de la energía cinética que deberá ser una suma de cuadrados de velocidades por coeficientes adecuados, en virtud de haber supuesto que faltan los términos de acoplamiento dinámico (ecuación 10).

Que exista o no acoplamiento dinámico depende exclusivamente de las coordenadas que se hayan elegido para especificar la posición del sistema. Dada la expresión (7) de la energía cinética, siempre es posible encontrar nuevas coordenadas, combinaciones lineales de las antiguas, que reducen la expresión (7) a una suma d cuadrados de velocidades, transformando el sistema con acoplamiento dinámico, en otro que sólo tiene acoplamiento estático (Ref. 4, pp. 207-210). Según se ha mostrado anteriormente, el sistema con acoplamiento estático se puede transformar finalmente en un conjunto de osciladores simples, sin acoplamiento; igual cosa vale, por tanto, para un sistema con acoplamiento dinámico.

Vamos a mostrar, por medio de un ejemplo, que la naturaleza del acoplamiento depende de la elección de coordenadas.

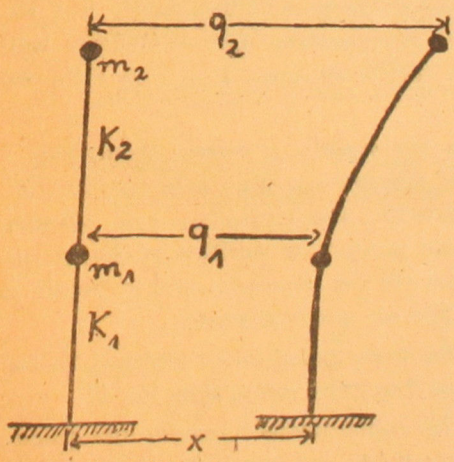

Fig. 1.

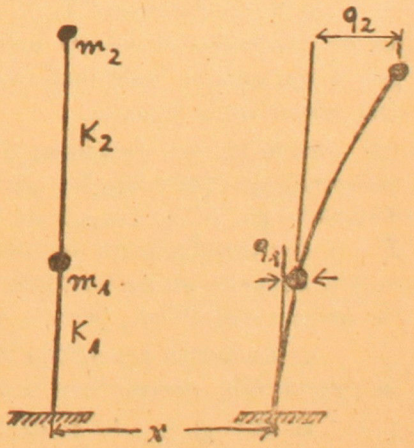

Fig. 2.

Sea el sistema representado en las figuras 1 y 2. Si las coordinadas se eligen como en fig. 1, se tiene

$$T = \frac{1}{2} \left\{ m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2 \right\}$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 (q_1 - x)^2 + \frac{1}{2} k_2 (q_2 - q_1)^2$$

en este caso sólo hay acoplamiento estático.

En cambio, si las coordenadas se eligen como en fig. 2

$$T = \frac{1}{2} \left\{ m_1 (\dot{x} + \dot{q}_1)^2 + m_2 (\dot{x} + \dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \right\}$$

$$V = \frac{1}{2} \left\{ k_1 q_1^2 + k_2 q_2^2 \right\}$$

y ahora sólo tenemos acoplamiento dinámico.

7. **Estructuras con amortiguamiento.** Supondremos que las fuerzas disipativas son funciones lineales de las velocidades (amortiguamiento viscoso). Esto simplifica el tratamiento matemático; la simplificación puede estimarse satisfactoria en primera aproximación.

En Ref. 5 Lord Rayleigh ha hecho un estudio bastante general de los sistemas con este tipo de amortiguamiento (Caps. IV y V).

Para ello introduce una función F

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i,j} b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \tag{30}$$

esta función es tal que

$$-\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \tag{31}$$

da la $i^{\text{ésima}}$ componente de la fuerza de amortiguamiento, Q_i. La función F representa la mitad de la potencia de las fuerzas disipativas.

Las conclusiones principales a que se llega en esta teoría son:

a) Si las funciones T, V, F son simultáneamente reductibles a una suma de cuadrados, el sistema material puede representarse por osciladores simples amortiguados, independientes entre sí (no acoplados). Este caso tiene escasa importancia práctica;

b) Si las tres funciones T, V, F no son simultáneamente reductibles a una suma de cuadrados, las vibraciones del sistema son algo más complicadas. Sin embargo, si las fuerzas de amortiguamiento son pequeñas, y si, además, F y V son esencialmente positivas (caso que siempre se verifica en las estructuras), los períodos de los modos principales no son alterados por la presencia de fuerzas disipativas, pero la vibración decrece gradualmente;

c) La forma geométrica de los modos principales no es alterada en forma apreciable, siempre que se cumplan las hipótesis enunciadas en b);

d) Si ξ_r ($r = 1, 2, \ldots, n$) son las coordenadas normales del sistema sin amortiguamiento, para cada r existe un modo principal de oscilar del sis-

tema con amortiguamiento, en el cual la amplitud de las restantes coordenadas es pequeña frente a la de ξ_r y la fase de esta coordenada está en cuadratura con la fase de las restantes. Hay transferencia de energía entre los modos principales, que por tanto, no son rigurosamente ortogonales entre sí.

Según esto el principal efecto de las fuerzas de amortiguamiento viscosas es introducir diferencias de fase entre el movimiento de los osciladores simples que representan el sistema. Estas diferencias de fase no tienen importancia, si se superponen los esfuerzos en la forma explicada al final del párrafo 5.

Antes de concluir, queremos hacer de nuevo las necsarias reservas sobre el campo de aplicación de las teorías expuestas. Las hipótesis de linearidad sólo se cumplen para deformaciones relativamente pequeñas. Como ya se ha dicho en otro lugar, no se puede esperar que el amortiguamiento sea viscoso una vez pasado el límite elástico en alguna pieza de la estructura y, aún más, hay evidencia experimental que el amortiguamiento no es viscoso ni siquiera dentro de la fase elástica. No se puede prescindir tampoco de los fenómenos de "herencia": el comportamiento de la estructura depende de las solicitaciones a que haya estado sometida previamente. Ni siquiera se puede suponer que los parámetros de inercia sean constantes, dado el acoplamiento de la estructura con el terreno de fundación. A pesar de estas limitaciones, el análisis expuesto en este artículo puede servir de base, de primera aproximación, para ir incorporando luego en los cálculos influencia de los factores recién mencionados.

REFERENCIAS

1. A. Arias.—"Los Fundamentos Teóricos del Cálculo Antisísmico". Revista de Matemáticas del Seminario de Matemáticas, Esc. Ingeniería, U. de Chile, Nº 3, año 1954.

2. H. Lamb.—"Higher Mechanics".

3. E. T. Whittaker.—"Analytical Aynamics of Particles and Rigid Bodies". Dover, Nueva York, 1944.

4. T. V. Kármán y M. A. Biot.—"Mathematical Methods in Engineering". Mc-Graw-Hill, N. York, 1940. Caps. V y VI.

5. Lord Rayleigh.—"The Theory of Sound". Dover, N. York, 1945.

6. Alford, Housner y Martel.—"Spectrum Analyses of Strong-Motion Earthquakes". California, Institute of Technology, agosto, 1951, Apéndice A.