Tapizado de una superficie plana o esférica mediante polígonos regulares

PROF. DGO. ALMENDRAS

El problema del tapizado consiste en cubrir con una sola clase de polígonos regulares congruentes una superficie plana o esférica, sin dejar vacíos ni efectuar superposiciones.

Solución en el plano.—El ángulo de un polígono regular de n lados es dado por $w = \frac{(n-2)\,2R}{n}$. Puesto que alrededor de cualquier vértice deben concurrir un número entero p de ángulos w, que completen en total $4\,R$ ($R = 1$ recto), tendremos:

$$\frac{p\,(n-2)\cdot 2R}{n} = 4\,R$$

$$p = \frac{4}{n-2} + 2$$

Las soluciones enteras para p se obtienen con $n = 3;\ 4;\ 6$, resultando $p = 6;\ 4$ y 3, respectivamente. Esto significa que el plano se puede tapizar con triángulos equiláteros, cuadrados y exágonos regulares.

Solución en la esfera.—El área de un polígono regular esférico de n lados es $S = R^2\,[nw-(n-2)\,\pi]$, siendo R, el radio de la esfera y w, el ángulo del polígono. Las condiciones del tapizado exigen las dos condiciones siguientes:

1.° Un número p de polígonos regulares y congruentes entre sí deben cubrir totalmente la esfera;

2.° Un número q de ángulos iguales al ángulo w del polígono deben sumarse en cada vértice, de modo que cubran alrededor de él un ángulo completo de 4 rectos.

Estas dos condiciones conducen a las dos relaciones siguientes:

$$p\,[nw-(n-2)\,\pi] = 4\pi \tag{1}$$

$$qw = 2\pi \tag{2}$$

La eliminación de *w* nos conduce a la ecuación:

$$2 = \frac{4}{p} + \frac{(q-2)n}{q} \tag{3}$$

Puesto que cada sumando del segundo miembro es menor que 2 podemos deducir las siguientes desigualdades:

$$p > 2; \quad q < 2 + \frac{4}{n-2}\ ; \quad n < 2 + \frac{4}{q-2}$$

De la última resulta $q = 3, 4, 5$, y de la penúltima se tiene $n = 3, 4, 5$. Para $n = 6$ no hay solución, puesto que sería $q = 1$ o 2, y esto implicaría que $w = 2\pi$ o π, y el polígono se reduciría a un hemisferio o a la esfera entera.

Poniendo la ecuación 3 en la forma;

$$p = \frac{4q}{2n-(n-2)q} \tag{4}$$

Con $n=3$, tenemos: $p = \dfrac{4q}{6-q}$ de la cual se obtienen las siguientes soluciones enteras:

q	p
3	4
4	8
5	20

Con $n=4$, tenemos: $p = \dfrac{2q}{4-q}$ de la cual resulta;

$q = 3 ; p = 6$

Con $n=5$, tenemos: $p = \dfrac{4q}{10-3q}$ de la cual resulta;

$q = 3 ; p = 12$

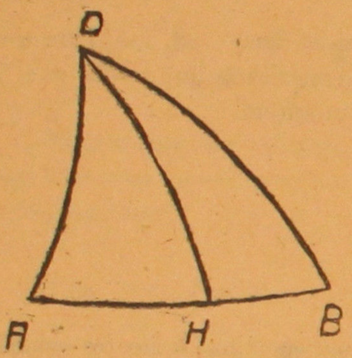
Las cinco soluciones se pueden resumir en el cuadro siguiente:

N.° de lados (n)	N.° de vértices que concurren (q)	N.° de polígonos (p)
3	3	4
3	4	8
3	5	20
4	3	6
5	3	12

Los cinco poliedros regulares.—En el supuesto de estar dividida la esfera en partes congruentes correspondiente a uno de los casos anteriores, si se unen los puntos de concurrencia de los vértices mediante cuerdas de la esfera, se determinará un poliedro regular.

La construcción de un polígono regular esférico con el cual se puede cubrir la esfera, es un sencillo problema de trigonometría.

Consideremos el caso del pentágono regular. Puesto que concurren tres vértices en un mismo punto tendremos $w=120°$ y si O es centro de uno de los pentágonos y AB uno de sus lados resultará:



ang $AOB=72°$; ang $OAB=60°$ y siendo ang $AHO=90°$, tendremos en el triángulo AHO:

$$\cos AO = tg 30° \; tg\, 54°$$

$$AO=37°22'$$
$$AH=20°54'$$
$$AB=41°48'$$

PROBLEMAS DE PREPARACIÓN AL BACHILLERATO CON MENCIÓN EN MATEMÁTICAS

1.—La suma de dos capitales es 1660 y la de sus intereses colocados al 5% y 10% respectivamente durante un año es $ 131. Determinar los capitales y sus intereses valiéndose de razonamientos aritméticos. Resolverlo algebraicamente. (Cédula 1).

2.—Una aleación de oro y plata pesa 130 gramos y dentro del agua pesa 121,1 g. Se pide determinar los gramos de oro y plata que contiene mediante razonamiento aritmético sabiendo que la densidad del oro es 19,3 y la de la plata 10,5. Plantear el problema mediante ecuaciones (Cédula 1 y 3).

3.—El radio de una circunferencia mide 25,8 metros y el ángulo del centro de un arco mide 52,5 grados centesimales. Calcular el área del sector correspondiente. (Cédula 1).

4.—Inscribir en un triángulo un cuadrado de modo que uno de sus lados quede sobre un lado del triángulo. (Cédula 1 si se usa homotecia). (Cédula 4 si se usa aplicación del álgebra). En este último caso se pide calcular el área del cuadrado en los tres casos posibles e indicar en una proposición general en cual de los casos resulta el cuadrado de mayor área. Poner un caso numérico.

5.—Construir una circunferencia tangente a dos lados de un ángulo y que pase por un punto dado (Cédula 1 y 4 según que emplee homotecia o aplicación del álgebra).

6.—Construir un triángulo conociendo $a+c$, $b+c$ y γ. (Cédula 1 si se emplea homotecia y cédula 3 si utiliza figuras inscritas).

7.—Determinar el L. G. de los centros de los paralelogramos ABCD que tienen un vértice fijo A y los vértices consecutivos B y C están en una circunferencia dada. (Cédula 3).

8.—Los extremos de un segmento AB deslizan sobre dos rectas OX y OY. Se pide: *a*) LG del centro de la circunferencia circunscrita al triángulo AOB; *b*) si desde A y B se trazan las perpendiculares AM y BN a los lados OX y OY, respectivamente, probar que MN es constante. (Cédula 3).

9.—Dado un triángulo ABC y un punto P en la prolongación de BA, trazar desde P una secante que corte AC en R y BC en Q y de modo que AR sea igual a BQ. (Cédula 1).

10.—Dado un tronco de cono recto de radios basales r y r′ y altura h trazar un plano paralelo a las bases y que dimidie el volumen. (Cédula 4).

PUBLICACIONES CIENTÍFICAS

1. *Fourier Transforms.—Ian N. Sneddon.* —Editada por McGraw-Hill Book Company.—New York, 1951.

Es una de las obras más completas sobre la materia. Los primeros tres capítulos contienen un resumen de la teoría de varios transforms integrales, como los de Fourier, Mellin etc. Los capítulos siguientes contienen aplicaciones a la resolución de difíciles problemas de vibraciones, conducción del calor, hidrodinámica y física atómica y nuclear.

Esta obra se recomienda a matemáticos, físicos e ingenieros.

2. *Obras del profesor R. Churchill.*—A medida que van apareciendo las publicaciones del profesor Churchill, ellas van difundiéndose rápidamente entre profesores y alumnos, gracias a tres de sus principales cualidades:

a) magnífica exposición pedagógica;

b) profundidad y sencillez de sus demostraciones;

c) interesantes aplicaciones a las matemáticas puras, física e ingeniería.

Se recomiendan a los alumnos las dos siguientes obras del profesor R. Churchill:

«Fourier series and boundary value problems». 206 pág. McGraw-Hill. «*Complex variables*». 216 pág. McGraw-Hill.

Imprenta Nascimento - Arturo Prat 1428 - Santiago