Nota sobre el cálculo de coeficientes en la fórmula de Stirling

Por Jorge Jiles Caffarena

La fórmula de Stirling tiene aplicaciones en campos extensos de las matemáticas, principalmente en el de las probabilidades. El estudio de la función gamma, iniciado por Euler, Legendre, Gauss y otros, conduce naturalmente a la fórmula encontrada por Stirling en sus Methodus Differentialis (1730). Emile Borel en su tratado de cálculo de probabilidades expone un método para la obtención de algunos de los coeficientes del desarrollo de Stirling, pero no es general. En el presente trabajo se trata de suplir esa deficiencia.

Expondremos un método elemental para obtener el desarrollo de la función

$$\mu(n) = \alpha_o + \frac{\alpha_1}{n} + \cdots + \frac{\alpha_m}{n_m}(1 + \theta_m),$$

siendo

1) $$n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}\, e^{\mu(n)}$$

De aquí se tiene

1′) $$(n+1)! = (n+1)^{n+\frac{3}{2}} e^{-n-1} \sqrt{2\pi}\, e^{\mu(n+1)}$$

De (1) y (1′), obtenemos

$$\frac{e^{\mu(n+1)}}{e^{\mu(n)}} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

y tomando logaritmos naturales

$$\mu(n+1) - \mu(n) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\mu(n+1) - \mu(n) = 1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\left[-\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \cdots\right]$$

juntando los términos que contienen las mismas potencias de $\frac{1}{n}$, obtenemos:

$$2)\qquad \mu(n+1)-\mu(n)=\frac{1}{2}\sum_{K=2}^{\infty}(-1)^{K+1}\frac{K-1}{K(K+1)}\left(\frac{1}{n}\right)^{K}$$

Reemplazando $\mu(n+1)$ y $\mu(n)$ por sus desarrollos, se tiene:

$$3)\qquad \alpha_1\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\alpha_2\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n^2}+\cdots+\alpha_r\frac{1}{(n+1)^r}-\frac{1}{n^r}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{K=2}^{\infty}(-1)^{K+1}\frac{K-1}{K(K+1)}\left(\frac{1}{n}\right)^{K}$$

$$r+1<m$$

Utilizando la fórmula

$$\frac{1}{(X+1)^p}=1-\frac{p}{1!}X+\frac{p(p+1)}{2!}X^2-\cdots+(-1)^i\frac{p(p+1)\cdots(p+i-1)}{i!}X^i+\cdots$$

$$=\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^K C^K_{p+K-1}X^K \qquad ; \qquad |X|<1$$

y reemplazando X por $\frac{1}{n}$, se tiene:

$$4)\qquad \frac{n^p}{(n+1)^p}=\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^K C^K_{p+K-1}\frac{1}{n^K}$$

Ahora bien

$$\frac{1}{(n+1)^p}-\frac{1}{n^p}=\frac{n^p}{(n+1)^p}-1\,\frac{1}{n^p}$$

$$\frac{1}{(n+1)^p}-\frac{1}{n^p}=\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^K C^K_{p+K-1}\frac{1}{n^K}-1\,\frac{1}{n^p}$$

El primer término de $\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^K C^K_{p+K-1}\frac{1}{n^K}$ es 1, luego

$$5)\qquad \frac{1}{(n+1)^p}-\frac{1}{n^p}=\sum_{K=1}^{\infty}(-1)^K C^K_{p+K-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{K+p}$$

Reemplazando en 3) para p = 1,2,. . . . . r, obtenemos:

$$5) \quad \alpha_1 \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K C_K^K \left(\frac{1}{n}\right)^{K+1} +$$

$$\cdots + \alpha_r \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K C_{r+K-1}^K \left(\frac{1}{n}\right)^{K+r} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{K=2}^{\infty} (-1)^{K+1} \frac{K-1}{K(K+1)} \left(\frac{1}{n}\right)^K$$

Igualando los coeficientes de $\left(\frac{1}{n}\right)^{r+1}$, tenemos

$$\alpha_1 C_r^r (-1)^r + \alpha_2 C_r^{r-1} (-1)^{r-1} + \cdots + (-1)^1 \alpha_r C_r^1$$

$$= \frac{1}{2} (-1)^{r+2} \quad \frac{r}{(r+1)(r+2)}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i C_r^{r+1-i} (-1)^{r+1-i} = \cdot|\cdot$$

Multiplicando por $(r+1)(r+2)(-1)^r$ y tomando en cuenta que

$(r+1)(r+2) C_r^p = C_{r+2}^{p+2} (p+1)(p+2)$, tenemos

$$6) \qquad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i C_{r+2}^{i+1} i(i+1)(-1)^{i-1} = \frac{1}{2} r$$

cambiando la notación

$$\alpha_i i(i+1) = (-1)^{i+1} \beta_{i+1}$$

$$7) \qquad \sum_{i=1}^{r} \beta_{i+1} C_{r+2}^{i+1} = \frac{1}{2} r$$

ahora si ponemos $\frac{1}{2} = -\beta_1$ en el segundo miembro de 7) y efectuamos algunos cambios:

8) $\beta_{r+1} C_{r+2}^{r+1} + \beta_r C_{r+2}^{r} + \cdots + C_{r+2}^{2} \beta_2 + C_{r+2}^{1} \beta_1 + 1 = 0$

Esta relación de recurrencia la cumplen los números de Bernoulli luego,

$$\beta_{2K+1} = 0$$

$$\beta_{2K} = B_K (-1)^{K-1}$$

$$\text{y} \quad \alpha_{2K-1} = \frac{(-1)^{K-1} B_K}{(2_{K-1})\, 2_K}$$

BIBLIOGRAFÍA.—Probabilités, Erreurs. E. Borel. Elementary Number Theory. Uspensky and Heaslet.