



Los fundamentos teóricos del cálculo antisísmico

POR EL ING. ARTURO ARIAS S.

Hace algún tiempo, el profesor señor Domingo Almendras ha tenido la gentileza de pedir al autor que ocupara dos sesiones del Seminario de Matemáticas para hablar sobre el tema del epígrafe. El presente artículo es la transcripción escrita de la primera de esas charlas. En un trabajo próximo se expondrá lo dicho en la segunda.

El propósito de estos trabajos es establecer aquellos resultados de la teoría general de vibraciones que sirven de base a los métodos de cálculo antisísmico. En este artículo se pasa revista al estado actual del problema para estructuras de un grado de libertad.

Se han utilizado varias hipótesis para determinar las fuerzas que actúan sobre una estructura sometida a temblor, a partir del conocimiento que se pueda tener del movimiento del terreno de fundación que la soporta. La más simple y más usada de estas hipótesis consiste en suponer que todas las partes de la estructura tienen una misma aceleración, que se supone igual a la del suelo. El cálculo de las fuerzas se hace, entonces, aplicando la ley de Newton, de proporcionalidad entre fuerzas y aceleraciones. Esta hipótesis no toma en cuenta que toda estructura está formada por elementos más o menos flexibles; por el contrario, supone que la estructura es perfectamente rígida y que se mueve junto con la fundación. Los resultados de la experiencia están en contradicción con esta hipótesis: edificios proyectados para resistir fuerzas horizontales equivalentes a un quinceavo de su peso, es decir, para resistir un temblor en que la aceleración horizontal de la fundación fuera, como máximo, un quinceavo de la aceleración de gravedad, han resistido terremotos en que se han medido aceleraciones varias veces mayores.

Posteriormente, se han elaborado otras teorías en las que se tiene en cuenta la elasticidad de la estructura; pero, a falta de registros sismográficos satisfactorios, estos análisis han tenido que completarse haciendo alguna hipótesis simplificada respecto de la naturaleza del movimiento del suelo. Se suponía, generalmente, que éste era armónico simple y se estudiaba sólo la oscilación forzada o de régimen.

Los resultados a que se llegaba por este camino eran de valor muy limitado; primero, porque en la zona destructora de un terremoto el movimiento del suelo

no es armónico, y segundo, porque siendo el temblor un fenómeno de duración relativamente corta, no se alcanza a establecer el régimen.

Por no ser el movimiento del suelo un movimiento armónico sostenido, se necesita una teoría más elaborada. Esta teoría debe estudiar la respuesta de la estructura a un movimiento «transiente» e irregular; es decir, a un movimiento que tiene un comienzo y un fin y que, además, es de una naturaleza extraordinariamente complicada.

Recordemos algunos puntos fundamentales de la teoría de las vibraciones.

Un oscilador lineal simple es un sistema mecánico formado por un punto material que puede moverse sobre una recta y que está ligado a un punto fijo de ella, mediante un resorte que sigue la ley de Hooke. La respuesta de este sistema, cuando es solicitado por una fuerza perturbadora periódica, se compone de dos partes: una *oscilación transiente*, cuyo período es el propio del oscilador y cuya amplitud depende de las condiciones iniciales, y una *oscilación permanente, forzada o de régimen*, cuyo período es el de la fuerza perturbadora periódica y cuya amplitud es independiente de las condiciones iniciales. En caso que haya amortiguamiento, la oscilación transiente decrece paulatinamente hasta prácticamente desaparecer, quedando sólo la forzada.

Supongamos un oscilador simple, no solicitado por fuerza perturbadora alguna (oscilaciones libres). La ecuación del movimiento es

$$mx'' = -kx \quad (1)$$

en que m es la masa del oscilador; k , la rigidez del resorte; x designa la elongación y los acentos indican derivación respecto del tiempo. La solución de (1) es

$$x = x_0 \cos pt + \frac{v_0}{p} \operatorname{sen} pt \quad (2)$$

siendo x_0 la elongación inicial y v_0 la velocidad inicial, y en que

$$p^2 = \frac{k}{m} \quad (3)$$

Resulta, pues, que si la elongación inicial es nula, la solución se reduce a

$$x = \frac{v_0}{p} \operatorname{sen} pt \quad (4)$$

Consideremos ahora, el caso en que existe además una fuerza perturbadora,

$$F = F(t)$$

En la ecuación diferencial del movimiento, habrá que agregar este término perturbador en el segundo miembro:

$$mx' = -kx + F(t) \quad (5)$$

Para obtener la solución de la nueva ecuación diferencial, podemos proceder por superposición, agregando a la solución (2), la perturbación provocada por F . Esto es lícito, por tratarse de una ecuación lineal.

Durante el intervalo $(\theta, \theta + \Delta\theta)$, el impulso de las fuerzas vale

$$F(\theta) \Delta\theta$$

Si designamos por

$$m\Delta v$$

el incremento correspondiente de la cantidad de movimiento, resulta, en virtud del teorema del impulso,

$$\Delta v = \frac{F(\theta)}{m} \Delta\theta \quad (6)$$

A la solución (2) se agrega, entonces, en virtud de las ecuaciones (4) y (6), en el instante θ una oscilación armónica dada por

$$\Delta x = \frac{\Delta v}{p} \operatorname{sen} p(t-\theta) = \frac{F(\theta)}{mp} \operatorname{sen} p(t-\theta) \Delta\theta$$

Superponiendo estas perturbaciones y pasando al límite, se obtiene finalmente

$$x = x_0 \cos pt + \frac{v_0}{p} \operatorname{sen} pt + \int_0^t \frac{F(\theta)}{mp} \operatorname{sen} p(t-\theta) d\theta \quad (7)$$

Los dos primeros términos del segundo miembro representan la oscilación libre; la integral (integral de Duhamel) representa la perturbación.

Establecido el resultado anterior, podemos pasar a estudiar la respuesta de una estructura de un grado de libertad, sometida a temblor. Supondremos que la estructura se puede representar por un oscilador lineal simple, constituido por una masa m , ligada al suelo por un elemento de rigidez k , constante (la estructura sigue la ley de Hooke). La fuerza ejercida sobre m es x veces la rigidez del elemento elástico (fig. 1).

Se pide el movimiento relativo de la masa m respecto del suelo, cuando éste se mueve según una ley conocida. Para el sistema en estudio, no se resta generalidad a los resultados, si suponemos que el movimiento del suelo es rectilíneo y horizontal.

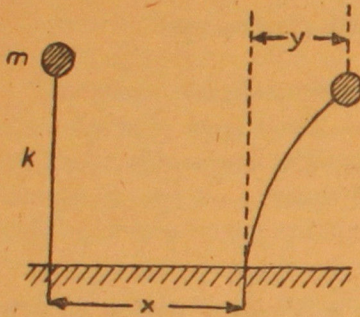


Fig. 1.—Esquema de oscilador lineal simple

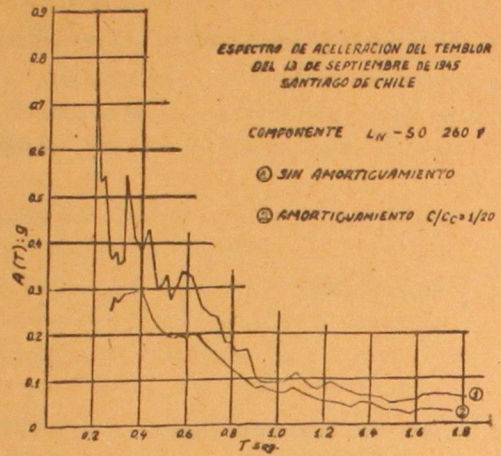


Fig. 2.—Espectros de aceleración del temblor del 13 de setiembre de 1935, sin amortiguamiento y con amortiguamiento igual a 0,05 veces el crítico

Sea x la elongación del suelo; sea y la elongación relativa del punto material. La ecuación fundamental de la dinámica da

$$m(x + y)'' = -ky \quad (8)$$

La expresión

$$x'' = a(t) \quad (9)$$

es la aceleración del suelo, conocida, para un temblor dado, por los registros que se obtienen en acelerógrafos.

La ecuación (8) se puede ordenar como sigue:

$$my'' = -ky - ma(t) \quad (10)$$

Comparando esta ecuación con (5), se ve que se trata del movimiento de un oscilador lineal simple, perturbado por la fuerza (fuerza de inercia)

$$F(t) = -ma(t)$$

La solución del problema será, entonces,

$$y = y_0 \cos pt + \frac{v_0}{p} \sin pt - \int_0^t \frac{a(\theta)}{p} \sin p(t-\theta) d\theta \quad (11)$$

Si la estructura se encontraba inicialmente en reposo, en su posición de equilibrio, lo anterior se reduce a

$$y = - \int_0^t \frac{a(\theta)}{p} \operatorname{sen} p(t-\theta) d\theta \quad (12)$$

Al ingeniero le interesa especialmente conocer las fuerzas que el temblor provoca en la estructura. En el caso de una estructura de un grado de libertad, basta conocer, por ejemplo, el esfuerzo de corte en la base, para conocer las sollicitaciones en cada uno de los elementos. Este esfuerzo de corte basal vale

$$V = ky = -mp \int_0^t a(\theta) \operatorname{sen} p(t-\theta) d\theta = -mf(t) \quad (13)$$

La función

$$f(t) = -p \int_0^t a(\theta) \operatorname{sen} p(t-\theta) d\theta = -\frac{2\pi}{T} \int_0^t a(\theta) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t-\theta) d\theta \quad (14)$$

da la historia del oscilador a lo largo del tiempo. Se ve que para un temblor dado, es decir, para $a(\theta)$ dado, la función $f(t)$ depende únicamente de t y del parámetro T , período propio del oscilador o de la estructura. Si llamamos A el máximo valor de $f(t)$, se tiene

$$V_{\text{máx}} = mA \quad (15)$$

Se puede comparar este resultado con el que se obtendría si se supusiera que la estructura es rígida y sigue al suelo en su movimiento. En tal caso, se tendría

$$V_{\text{máx}} = ma_{\text{máx}} \quad (16)$$

en que $a_{\text{máx}}$ es la máxima aceleración del suelo. La ecuación (16) corresponde a la teoría simplista, esbozada al comenzar este artículo; la ecuación (15) es, en cambio, el resultado de una teoría más elaborada, que tiene en cuenta la flexibilidad de la estructura y el carácter transiente e irregular del movimiento sísmico.

Está claro que para un terremoto dado, el valor de A depende del parámetro T ; es decir, del período propio de la estructura. La cantidad A se puede avaluar para cada valor del período T , y puede ser considerada como una función $A(T)$ del período del oscilador. El valor de la función $A(T)$ se llama *aceleración eficaz* del temblor, para el período T ; esta denominación está justificada por la correspondencia que hay entre los términos de las ecuaciones (15) y (16). La curva que representa la función $A(T)$ recibe el nombre de *espectro de aceleración* del temblor.

La importancia práctica de este concepto de espectro de aceleración reside en el hecho que, una vez conocido el espectro de un terremoto, es posible escribir de inmediato el valor del esfuerzo de corte máximo en la base, provocado por el terremoto sobre cualquiera estructura asimilable a un oscilador lineal simple. Para obtener dicho esfuerzo de corte, basta multiplicar la masa de la estructura por la ordenada del espectro para el valor de T correspondiente.

Como resulta muy tedioso evaluar la función $A(T)$ por integración numérica, se han ingeniado varios métodos mecánicos o eléctricos para efectuar los cálculos. Sólo mencionaremos el péndulo de torsión ideado por M. A. Biot para resolver el problema. Este instrumento consiste en un hilo vertical, de acero, por ejemplo, del cual cuelga una barra horizontal que lleva dos masas dispuestas simétricamente; la barra puede girar en torno del eje vertical que pasa por el hilo; el punto de suspensión puede hacerse rotar a voluntad en torno del mismo eje. Es fácil establecer que la ecuación diferencial que rige las oscilaciones de torsión de este péndulo, es análoga a la ecuación (10). Sea I el momento de inercia de la barra y de las masas en torno del eje de rotación; φ , una coordenada angular que define la posición de la barra; c , la rigidez a la torsión del hilo, y $\alpha = \alpha(t)$, el ángulo en que ha girado la suspensión, medido en el mismo sentido que φ . La ecuación del movimiento, obtenida por el teorema del momento cinético, es

$$I \varphi'' = -c(\varphi - \alpha) \quad (17)$$

que, como se ve, es análoga a la ecuación (10). Entonces, adoptando escalas adecuadas, la respuesta del péndulo de torsión coincide con la respuesta de la estructura solicitada por temblor, siempre que el giro de la suspensión sea proporcional a las ordenadas del acelerograma.

En la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile, los ex alumnos, hoy ingenieros, señores Juan Lepe y Ramón Torres han construido, con el auxilio del taller que posee el Instituto Sismológico, un péndulo de torsión, con el cual han podido hacer el análisis del acelerograma del temblor del 13 de septiembre de 1945, registrado en Santiago. En la fig. 2 aparece el espectro de este temblor.

Para un lugar dado se pueden obtener los espectros de todos los temblores que se hayan registrado en dicho lugar y construir luego, una envolvente de los espectros, curva que se puede considerar como *espectro tipo de aceleración*, para el lugar en cuestión. Lo que se necesita para proyectar estructuras antisísmicas en un lugar dado, es precisamente esta envolvente de los espectros. A base de un análisis de varios temblores, Biot ha propuesto en forma tentativa el espectro tipo de la fig. 3.

Esta curva pone en evidencia que las estructuras flexibles, de período propio largo, soportan, en general, esfuerzos de corte menores que las estructuras rígidas, de período propio más corto. Los acelerogramas analizados por Biot, han sido registrados mediante acelerógrafos cuyo período es 0,1 seg. Aunque estos instrumentos están adecuadamente amortiguados para funcionar como acelerógrafos, no debe darse mucha importancia a la parte del espectro que corresponde a períodos menores de 0,2 seg. Por esta razón, otros investigadores proponen $A(T) = g$, para $T \leq 0,2$.

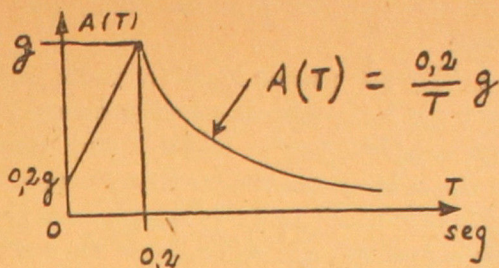


Fig. 3.—Espectro de aceleración tipo propuesto por Biot

El análisis expuesto anteriormente se puede modificar levemente para tener en cuenta el efecto de un amortiguamiento viscoso —proporcional a la velocidad— sobre la respuesta de la estructura. La ecuación (10) se transforma en

$$my'' = -ky - cy' - ma(t) \quad (10)'$$

en que el término $-cy'$ corresponde a las fuerzas de amortiguamiento. La integración de la ecuación (10)' se hace en forma análoga a la expuesta más arriba para la ecuación (10); los detalles del cálculo se dejan al lector. En la fig. 2 aparece el espectro del temblor del 13 de septiembre de 1945 para un amortiguamiento igual a 0,05 veces el amortiguamiento crítico.

Como era de esperar, la presencia de fuerzas de amortiguamiento trae por consecuencia una notable reducción de amplitudes; su efecto es beneficioso y a dichas fuerzas debe atribuirse en gran parte que, estructuras diseñadas para fuerzas horizontales relativamente pequeñas, hayan resistido tan bien. Las experiencias realizadas con péndulos de torsión en los EE. UU., han llevado a la conclusión que, si el amortiguamiento es pequeño, bastan pequeñas variaciones del amortiguamiento para obtener grandes variaciones en las amplitudes; esta influencia del amortiguamiento se hace menos importante (relativamente) para amortiguamientos fuertes.

A continuación discutiremos las hipótesis que se han hecho para plantear e integrar las ecuaciones (10) y (10)'.

En primer lugar, se ha supuesto que la estructura se comporta como un sistema mecánico de un grado de libertad; esto limita el campo de aplicación de los resultados a estructuras muy simples. En un próximo trabajo, nos proponemos extender el método a estructuras de varios grados de libertad.

Se ha admitido que la rigidez k es una constante. Para las estructuras reales, k es función de la elongación; esto complica extremadamente el problema de la integración de la ecuación (10), que deja de ser lineal. Deja de valer el principio de superposición, y todo el análisis anterior queda invalidado. Ya no cabe hacer una distinción entre oscilación transiente y oscilación forzada; no se pueden sumar, simplemente, los efectos de impulsos sucesivos, y la solución del problema no se puede obtener por la integral de Duhamel; la oscilación libre y la perturbación dejan de ser independientes, y no vale hacer distinción entre ellas. Afortunada-

mente, el efecto de esta no-linearidad de la estructura introduce una segunda limitación de amplitudes.

Consideraciones análogas se pueden hacer en lo que respecta al amortiguamiento. Se ha supuesto que las fuerzas de amortiguamiento son proporcionales a la velocidad; esta aproximación resulta tolerable para elongaciones pequeñas. Apenas las deformaciones se hacen apreciables, aparecen en la estructura deformaciones permanentes y la tasa de disipación de energía crece en forma extraordinaria. También se puede esperar que esta no-linearidad del amortiguamiento resulte beneficiosa para la estructura, aunque complica extremadamente el análisis.

En conexión con las deformaciones permanentes que se producen en la estructura durante un terremoto, cabe esperar que estas deformaciones cambien las características de la estructura; es lo que comprueba la experiencia: el período propio (para oscilaciones de pequeña amplitud) de una estructura no es el mismo antes que después de producidas las deformaciones permanentes; deben esperarse, entonces, lo que Volterra llama fenómenos hereditarios: por ejemplo, las propiedades elásticas de la estructura dependerán de su *historia*.

Se ha supuesto, finalmente, que la estructura se comporta como si estuviera colocada sobre una mesa vibrante, animada de un movimiento horizontal. La realidad es más compleja: hay rotación y deslizamiento de la fundación; esto introduce nuevos grados de libertad. Hay transferencia de energía de la estructura a su fundación. Parte del terreno, participa del movimiento de la estructura, lo que acarrea una incertidumbre en la definición de los parámetros que la caracterizan: su masa, por ejemplo.

Como puede apreciarse, el problema del cálculo antisísmico, desde el punto de vista de sus fundamentos teóricos, apenas está planteado. El intento de resolverlo en la forma propuesta por Biot, fracasa —aunque no del todo— por estar basado en simplificaciones demasiado drásticas. Y decimos no del todo, porque, si bien es cierto que el espectro tipo que propone Biot, conduce a fuerzas exageradas, puede servir de base para apreciar el efecto beneficioso de los distintos factores que hemos discutido más arriba y conducir, por último, a una solución satisfactoria.

Ojalá que esta misma incertidumbre e ignorancia nuestra, sea una incitación a la investigación.

El autor agradece a los señores Lepe y Torres la autorización para reproducir los resultados de su análisis.

REFERENCIAS

1. JUAN LEPE Y RAMÓN TORRES.—*El péndulo de torsión en el análisis sísmico*. Memoria para optar al título de ingeniero civil. Santiago, 1950.
2. M. A. BIOT.—*Analytical and experimental methods in engineering seismology*. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1943, pp. 365-408.
3. VARIOS AUTORES.—*Lateral forces of earthquake and wind*. Proceedings of the American Society of Civil Engineers. April, 1951; Separate N.º 66.
4. VARIOS AUTORES.—*Discussion of lateral forces of earthquake and wind*. Id. May, 1952; Separate N.º D-66.