

Estudio sobre las superficies de influencia en placas rectangulares

EXTRACTO DE UN ESTUDIO ELÁSTICO-MATEMÁTICO SOBRE PLACAS PLANAS,
PRESENTADO A LA UNIVEESIDAD DE CHILE PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL

SANTIAGO ARIAS S.

EXPOSICIÓN GENERAL DEL MÉTODO. TEOREMA BÁSICO.

El método se puede resumir en el siguiente teorema: «Cuando un determinado efecto Q es una función lineal de las deformaciones w_a, w_b, \dots, w_k , de los puntos a, b, \dots, k , respectivamente, como en la ecuación siguiente:

$$Q = Aw_a + Bw_b + \dots + Kw_k$$

y si al mismo tiempo también las deformaciones son linealmente relacionadas con las cargas, la influencia en Q de una carga unitaria $P=1$ actuando en cualquier punto m es obtenida como la deformación en el punto m debido a las cargas de magnitud A, B, \dots, K , aplicadas respectivamente en los puntos a, b, \dots, k »

Este teorema básico es fácil demostrarlo aplicando el teorema de Maxwell sobre la reciprocidad de las deformaciones en materiales que trabajan dentro del límite de validez de la ley de Hooke.

De lo anterior, se observa que para determinar las superficies de influencia de un determinado efecto, digamos por ejemplo, momento de flexión, torsión, esfuerzo de corte, etc. para un punto cualquiera de una placa plana, basta con encontrar una relación lineal entre estos efectos y las deformaciones de los puntos de la placa.

Sabemos que esto sucede precisamente si empleamos las relaciones a diferencia finita para representar el estado elástico de tensión de la placa.

APLICACIÓN.

Determinación de las superficies de influencia para los momentos positivos M_x y M_y en el centro de una placa rectangular simplemente apoyada.

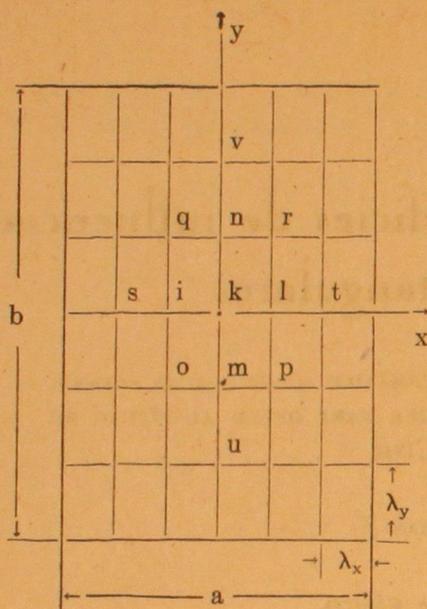


Fig. 1

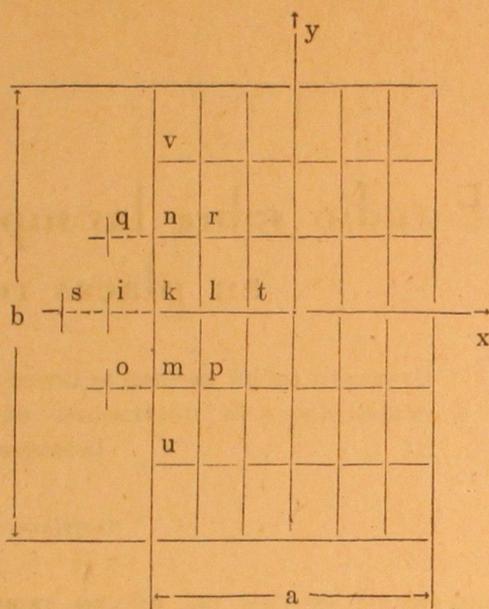


Fig. 2

Para un estado elástico plano de tensión tenemos las siguientes relaciones diferenciales:

$$a) \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad \text{donde: } D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \text{ es la rigidez de la placa.}$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \quad \begin{array}{l} h \text{ es su altura y} \\ \mu \text{ es el coeficiente de Poisson.} \end{array}$$

Ahora bien, si designamos por Z_k la deformación vertical del tejido elástico segundo (Fig. 1) sabemos que se cumple la siguiente relación con la deformación w_k del plano medio de la placa.

$$w_k = \frac{S_1 S_2}{D} Z_k$$

y para el punto k las siguientes relaciones finitas:

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)_k = \frac{S_1 S_2}{D} \cdot \frac{Z_1 + Z_l - 2 Z_k}{\lambda_x^2}; \quad \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)_k = \frac{S_1 S_2}{D} \cdot \frac{Z_n + Z_m - 2 Z_k}{\lambda_y^2}$$

luego las expresiones diferenciales a) se transforman en las finitas siguientes:

$$(M_x)_k = S_1 S_2 \left[\frac{2 Z_k - Z_i - Z_l}{\lambda_x^2} + \mu \frac{2 Z_k - Z_n - Z_m}{\lambda_y^2} \right]$$

$$(M_y)_k = S_1 S_2 \left[\frac{2 Z_k - Z_n - Z_m}{\lambda_y^2} + \mu \frac{2 Z_k - Z_i - Z_l}{\lambda_x^2} \right]$$

Luego la superficie de influencia para $(M_x)_k$ se obtendrá resolviendo la placa de la Fig. 1 sometida a las cargas concentradas siguientes:

$$P_k = 2 \cdot S_1 S_2 \left(\frac{1}{\lambda_x^2} + \mu \frac{1}{\lambda_y^2} \right) \quad P_i = -1 \cdot S_1 S_2 \frac{1}{\lambda_x^2} \quad P_l = -1 \cdot S_1 S_2 \frac{1}{\lambda_x^2}$$

$$P_m = -\mu S_1 S_2 \frac{1}{\lambda_y^2} \quad P_n = -\mu S_1 S_2 \frac{1}{\lambda_y^2}$$

actuando en los puntos k, i, l, m y n, y la superficie de influencia para $(M_y)_k$ se obtendrá resolviendo la placa correspondiente sometida a las cargas concentradas siguientes:

$$P_k = 2 \cdot S_1 S_2 \left(\frac{1}{\lambda_y^2} + \mu \frac{1}{\lambda_x^2} \right) \quad P_i = -\mu S_1 S_2 \frac{1}{\lambda_x^2} \quad P_l = -\mu S_1 S_2 \frac{1}{\lambda_x^2}$$

$$P_m = -1 \cdot S_1 S_2 \frac{1}{\lambda_y^2} \quad P_n = -1 \cdot S_1 S_2 \frac{1}{\lambda_y^2}$$

Para una placa rectangular simplemente apoyada Fig. 2 se cumplirán las siguientes condiciones límites:

$$Z_k = Z_m = Z_n = Z_u = Z_v = 0$$

$$Z_i = -Z_l \quad Z_q = -Z_r \quad Z_o = -Z_p$$

Para un punto k descargado vale la siguiente relación general del tejido segundo:

$$(6 + 8x^2 + 6x^4) Z_k - 4(1 + x^2) [x^2(Z_i + Z_e) + (Z_m + Z_n)] + 2x^2(Z_o + Z_p + Z_q + Z_r) + x^4(Z_s + Z_t) + (Z_u + Z_v) = 0$$

y para un punto k cargado con una carga P_k la relación:

$$(6 + 8x^2 + 6x^4) Z_k - 4(1 + x^2) [x^2(Z_i + Z_l) + (Z_m + Z_n)] + 2x^2(Z_o + Z_p + Z_q + Z_r) + x^4(Z_s + Z_t) + (Z_u + Z_v) = \frac{P_k \cdot x \lambda_y^2}{S_1 \cdot S_2}$$

APLICACIÓN NUMÉRICA AL CASO DE UNA PLACA CUADRADA SIMPLEMENTE APOYADA.

Con el objeto de limitar el número de ecuaciones simultáneas de primer orden por resolver, haré los cálculos numéricos de las superficies de influencia para los momentos máximos positivos empleando un tejido elástico formado por 36 partes iguales, según muestra la figura 3. Aceptaremos $\mu = 0$.

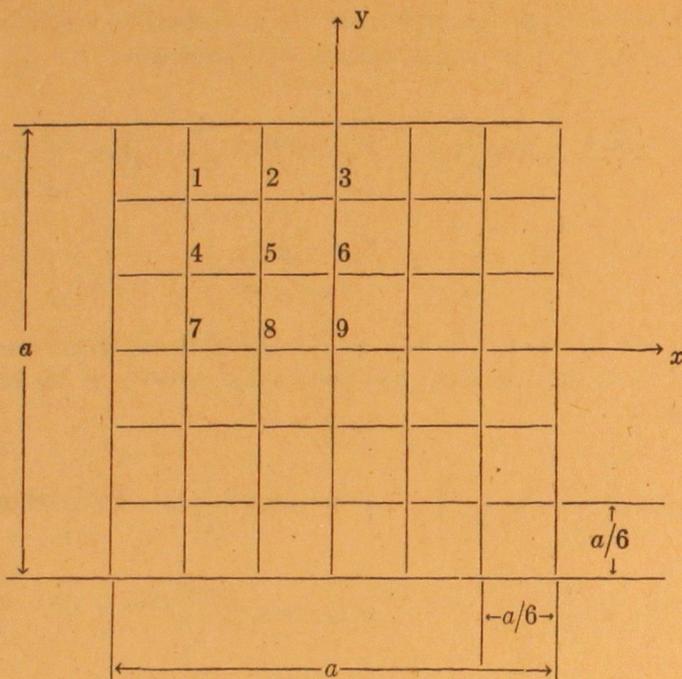


Fig. 3

Siguiendo el proceso ya indicado y resolviendo un sistema de 9 ecuaciones con 9 incógnitas obtenemos las siguientes ordenadas para las superficies de influencia de los momentos $(M_x)_9$ y $(M_y)_9$ correspondientes al centro de la placa. Placa $b/a = 1$ simplemente apoyada. $\mu = 0$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
i_k	0.0144	0.0371	0.0621	0.0204	0.0623	0.1356	0.0147	0.0564	0.2209

EJEMPLOS NUMÉRICOS.

a) Supongamos que sobre una placa cuadrada simplemente apoyada actúe una carga total uniformemente distribuída p , entonces en cada punto de la malla actuará una carga concentrada igual a:

$$P_k = p_k \lambda_x \lambda_y = \frac{pa^2}{36}$$

Veamos el momento positivo máximo: según modo conocido de operar con líneas de influencia tendremos:

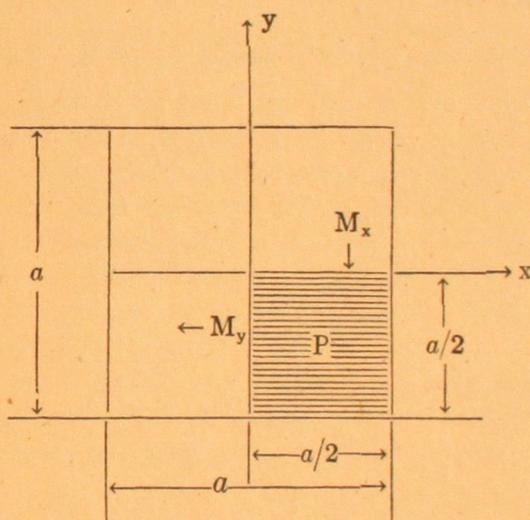
$$(M_x)_0 = (M_y)_0 = + \frac{pa^2}{36} [4(i_1 + i_2 + i_4 + i_5) + 2(i_7 + i_8) + 2(i_3 + i_6) + i_9] = P_k \sum i_k$$

$$(M_x)_0 = (M_y)_0 = + \frac{pa^2}{36} \cdot 1.3050 = + 0.0363 \cdot pa^2.$$

siendo el valor más exacto para $\mu = 0$, según Timoshenko

$$(M_x)_0 = (M_y)_0 = + 0.0368 \cdot pa^2.$$

b) Cálculo de los momentos positivos en el centro de la placa cuadrada y simplemente apoyada indicada en fig. 4, sometida a una carga excéntrica uniformemente repartida en el cuarto de la placa.



El cálculo se hará mediante el siguiente estado de carga:

$$P_1 = P_2 = P_4 = P_5 = \frac{1}{36} \cdot pa^2 \quad P_3 = P_6 = P_7 = P_8 = \frac{1}{72} pa^2 \quad P_9 = \frac{1}{144} pa^2$$

Según cuadro correspondiente ordenadas de influencias tenemos:

$$(M_x)_0 = (M_y)_0 = + 0.0239 \cdot pa^2 = + 0.0956 \cdot P$$

Mayores explicaciones sobre este tema se encuentran en la Memoria para optar al título de Ingeniero Civil del autor.

APENDICE

NOTACIÓN.

E . = Módulo de elasticidad del material de la placa.

h = Espesor de la placa.

D = Rigidez a la flexión de la placa.

μ = Coeficiente de Poisson.

ω = Desplazamiento vertical del plomo medio de la placa.

ω_k = Desplazamiento vertical de un punto k del plano medio.

Z_k = Desplazamiento vertical de un punto k del tejido elástico segundo.

S_1 = Componente horizontal en el tejido elástico primero.

S_2 = Componente horizontal en el tejido elástico segundo.

λ = Intervalos en las ecuaciones a diferencia.

M_x = Momento de flexión por unidad de longitud en secciones perpendiculares al eje x .

M_y = Momento de flexión por unidad de longitud en secciones perpendiculares al eje y .

$x = \frac{\lambda_y}{\lambda_x}$ relación entre intervalos según el eje y y según el eje x .