

# El método de "relajación"

ING. ARTURO ARIAS S.

## Resumen.

Se expone, mediante un ejemplo, la aplicación del método de Southwell a la resolución numérica de ecuaciones con derivadas parciales.

---

El método de «Relajación» es un procedimiento de cálculo numérico ideado primitivamente para la resolución de estructuras enrejadas y que, posteriormente, ha ido extendiendo su campo de aplicación, gracias a la labor de Southwell y de sus colaboradores. Hoy, el método es de una versatilidad extraordinaria y su uso abarca desde la resolución de ecuaciones algebraicas lineales, hasta la de ecuaciones a derivadas parciales; desde la evaluación de cargas críticas de pandeo y de frecuencias naturales (problemas ambos ligados con el cálculo de «eigenvalues»), hasta la resolución de cuestiones relacionadas con estados de tensiones elásticos, plásticos y elastoplásticos.

Este procedimiento de cálculo ha mostrado ser especialmente adecuado para tratar problemas con condiciones de borde complicadas.

En lo que sigue expondremos el método, aplicándolo a dos problemas sencillos.

## Ejemplo N.º 1.

Sea propuesto el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 3x + y - z + 4 = 0 \\ F_2 &= x - 4y + z - 5 = 0 \\ F_3 &= x - y + 3z - 8 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Comencemos por formar lo que Southwell llama «tabla de operaciones». Consiste ésta en una tabla en que se anotan los incrementos de las funciones  $F$  correspondientes a incrementos dados de las variables  $x, y, z$ . La tabla en cuestión será:

Operación	$\Delta F_1$	$\Delta F_2$	$\Delta F_3$
$\Delta x = 1$	+ 3	+ 1	+ 1
$\Delta y = 1$	+ 1	- 4	- 1
$\Delta z = 1$	- 1	+ 1	+ 3

(2)

Ahora demos a  $x$  y  $z$  valores arbitrarios  $x_0, y_0, z_0$  y calculemos los valores correspondientes de  $F_1, F_2, F_3$ . Salvo casualidad, los valores de las funciones  $F$ , no serán todos nulos; es decir,  $x_0, y_0, z_0$  no satisfarán el sistema (1). Los valores de las funciones  $F$ , que llamaremos residuos iniciales, serán una medida del error cometido al suponer que  $x_0, y_0, z_0$  es la solución de (1). Podemos partir de esta solución supuesta y corregirla mediante la tabla de operaciones (2): damos a  $x, y, z$  incrementos adecuados  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  y calculamos los incrementos correspondientes de las funciones  $F$ ; estos incrementos, sumados a los residuos iniciales, darán nuevos residuos, que son los correspondientes a los valores  $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z$  de las variables  $x, y, z$ . Repitiendo las operaciones se pueden obtener residuos tan pequeños como se quiera. La solución aproximada del sistema (1) será:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \Sigma \Delta x \\ y &= y_0 + \Sigma \Delta y \\ z &= z_0 + \Sigma \Delta z \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Por ejemplo, tomemos como valores iniciales

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

Los residuos iniciales serán + 4, - 5, - 8, respectivamente. Las operaciones de corrección (o de relajación, como dice Southwell) están indicadas en la tabla siguiente:

TABLA DE RELAJACIÓN

Operación			F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	Observaciones
$\Delta x$	$\Delta y$	$\Delta z$	+ 4	- 5	- 8	Residuos iniciales
		+ 3	- 3	+ 3	+ 9	Incrementos (I)
	- 0,5		+ 1	- 2	+ 1	Residuos (R)
				- 0,5	+ 2	+ 0,5
		- 0,5	+ 0,5	0	+ 1,5	R
				+ 0,5	- 0,5	- 1,5
- 0, 3			+ 1,0	- 0,5	0	R
			- 0,9	- 0,3	- 0,3	I
	- 0,2		+ 0,1	- 0,8	- 0,3	R
				- 0,2	+ 0,8	+ 0,2
+ 0,03			- 0,1	0	- 0,1	R
			+ 0,09	+ 0,03	+ 0,03	I
- 0,27	- 0,7	+ 2,5	- 0,01	+ 0,03	- 0,07	R

La solución aproximada de (1) será, de acuerdo con (3):

$$x = - 0,27$$

$$y = - 0,70$$

$$z = + 2,50$$

La solución exacta, obtenida por los métodos usuales, es:

$$x = - \frac{5}{19} = - 0,263$$

$$y = - \frac{13}{19} = - 0,684$$

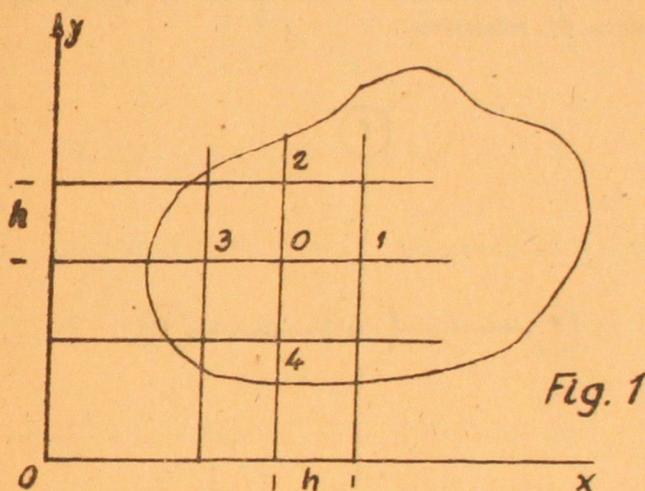
$$z = + \frac{48}{19} = + 2,52$$

El problema recién resuelto, pone de relieve la característica principal del método: concentrar la atención sobre los residuos, *no* sobre las incógnitas, y mediante operaciones adecuadas reducirlos a valores tan pequeños como se quiera.

*Ejemplo N.º 2.*—Consideremos la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = F(x, y) \quad (4)$$

Se pide resolverla dentro de un dominio dado, conocidas las condiciones de borde.



Lo primero que hacemos es cuadricular el dominio, dividiéndolo en cuadrados de lado  $h$ . La ecuación (4) puede sustituirse por un sistema de ecuaciones lineales, en que las incógnitas son los valores de  $\Phi$  en los nudos del cuadrículado. Esta sustitución se puede hacer utilizando las expresiones aproximadas de las derivadas que figuran en la ecuación (4), expresiones que se deducen en el cálculo de diferencias finitas:

$$h^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_0 \quad (5a)$$

$$h^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \Phi_2 + \Phi_4 - 2\Phi_0 \quad (5b)$$

El significado de los índices está indicado en la figura 1.

La ecuación (4) se reduce, entonces, a un sistema de ecuaciones lineales como la que sigue:

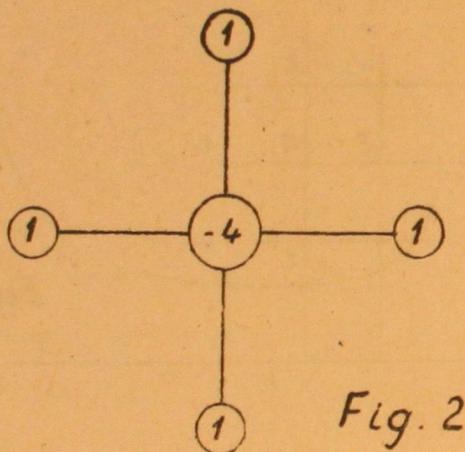
$$R_0 = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 - 4\Phi_0 - h^2 F = 0 \quad (6)$$

Para resolver este sistema, podemos proceder como se indicó en el ejemplo 1: comenzamos por dar a  $\Phi$  valores arbitrarios en cada uno de los nudos del cuadrículado; mediante (6) calculamos los residuos  $R$ , y «relajamos» hasta reducir estos residuos sensiblemente a cero.

La «tabla de operaciones» es fácil deducirla de la misma ecuación (6): un incremento  $\Delta\Phi_0 = 1$  trae aparejados incrementos:

$$\left. \begin{aligned} \Delta R_0 &= -4 \\ \Delta R_1 &= \Delta R_2 = \Delta R_3 = \Delta R_4 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

La tabla podemos representarla esquemáticamente por la siguiente figura (fig. 2) o «esquema de relajación».



No es necesario escribir el sistema de ecuaciones (6) y resolverlo en la forma explicada, mediante una tabla de relajación. Es más cómodo operar directamente en el mismo cuadrículado.

El ejemplo que tratamos a continuación está tomado de la teoría de la torsión de barras prismáticas, debida a Saint-Venant. El problema se resuelve introduciendo una función de tensiones  $\Phi$  que satisface la ecuación (4), siendo  $F$  una constante:

$$F = -2G\theta \quad (8)$$

en que  $G$  es el módulo de rigidez transversal del material de que está hecha la barra, y  $\theta$  es el ángulo de giro por unidad de largo de la pieza. Los ejes  $x$  e  $y$  están contenidos en una sección transversal del prisma; el eje  $z$  tiene la dirección del eje longitudinal. Las componentes de la tensión son todas nulas, salvo  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  que valen:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad ; \quad \tau_{yz} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (9)$$

Como sobre las caras laterales del prisma no obran fuerzas exteriores, las condiciones de borde se reducen a que  $\Phi$  es constante a lo largo del contorno de la sección transversal. No se pierde generalidad si se supone que este valor constante es cero.

Trataremos el caso de una barra de sección transversal cuadrada de lado unitario, sometida a torsión simple. Para comodidad de los cálculos hemos hecho

$$G \theta = 1 \quad (10)$$

de modo que los valores obtenidos para  $\Phi$  han de multiplicarse por  $G \theta$ . La ecuación 4 queda:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2 \quad (4)'$$

y la (6):

$$R_0 = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 - 4 \Phi_0 + 2h^2 = 0 \quad (6)'$$

Hemos elegido, primeramente,  $h = \frac{1}{8}$ ; aparece así, en la ecuación anterior, la fracción  $\frac{1}{32}$ ; por comodidad los valores de  $\Phi$  se han multiplicado por 32000, queda:

$$R_0 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4 V_0 + 1000 = 0 \quad (6)''$$

en que  $V$  está dado por:

$$32000 \Phi = G \theta V \quad (11)$$

Posteriormente se afinó la red, disminuyendo  $h$  a la mitad.

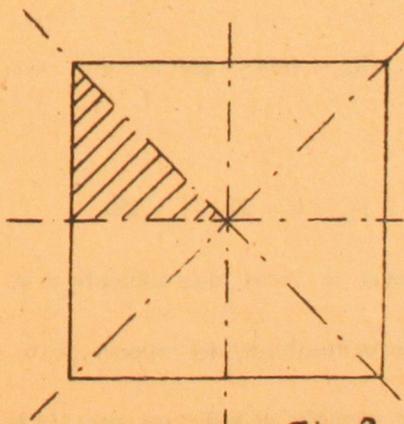
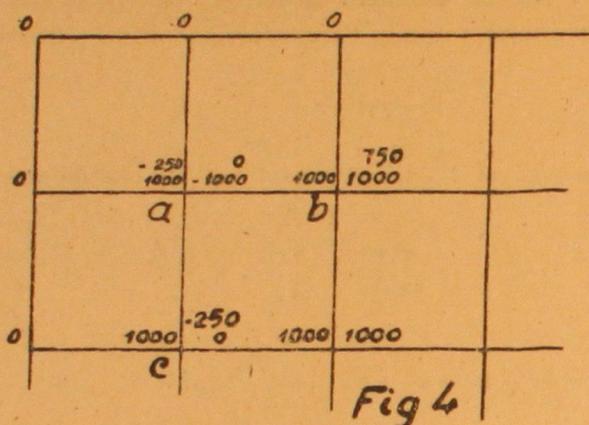


Fig. 3

Gracias a la simetría del problema, basta calcular  $V$  dentro y sobre el perímetro del triángulo sombreado (figura 3). Partimos asignando a  $V$  valores arbitrarios en cada uno de los nudos del cuadrículado; luego, mediante el esquema de relajación de la figura 2, corregimos estos valores hasta anular, o casi anular, los residuos. Supongamos, por ejemplo, que se supone de partida  $V = 1000$  en todos los nudos interiores. Anotamos estos valores a la izquierda



del nudo. A la derecha anotamos los residuos correspondientes. Por ejemplo, en el nudo  $a$ , el residuo es:

$$R_a = 1000 + 0 + 0 + 1000 - 4 \cdot 1000 + 1000 = -1000$$

Para reducir a cero el residuo en  $a$ , damos a  $V_a$  un incremento de  $-250$ . Después de esta operación  $V_a$  vale:

$$V_a = 1000 - 250 = 750$$

Por efecto de la misma operación el residuo en  $b$ , que valía  $1000$ , pasa a valer:

$$R_b = 1000 - 250 = 750,$$

y el residuo en  $c$ :

$$R_c = 0 - 250 = -250$$

Todas estas operaciones se hacen mentalmente y se van anotando sólo los resultados.

En la figura 5, se da el resultado del proceso, junto con las curvas de nivel de la superficie  $V$ .

Se pide calcular, por ejemplo, el valor máximo de la tensión.

El máximo ocurre en el punto  $A$  de la figura 5 y vale:

$$\tau_{\text{máx}} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_A \quad (12)$$

en que se entiende que la derivada ha de evaluarse en el punto A.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{G \Theta}{32000} \cdot \frac{1}{2h} (-3 V_A + 4 V_B - V_C) \quad (13)$$

$$h = \frac{1}{16}$$

$$V_A = 0 \quad V_B = 1218, \quad V_C = 2213$$

Resulta:

$$\tau_{\text{máx}} = 0,665 G \Theta$$

Si en lugar de tratarse de un cuadrado de lado unitario, el lado tiene la longitud  $2a$ , el resultado sería:

$$\tau_{\text{máx}} = 1,33 G \Theta a \quad (14)$$

El valor dado por Timoshenko («Teoría de la Elasticidad», pág. 295), es:

$$\tau_{\text{máx}} = 1,351 G \Theta a$$

La diferencia es menor de 2%, y se debe en gran parte a que  $h$  es muy grande. Haciendo el cálculo con una red más fina (basta tupir el cuadrículado en la zona que se desea),  $h = \frac{1}{32}$ , resulta:

$$\tau_{\text{máx}} = 1,338 G \Theta a$$

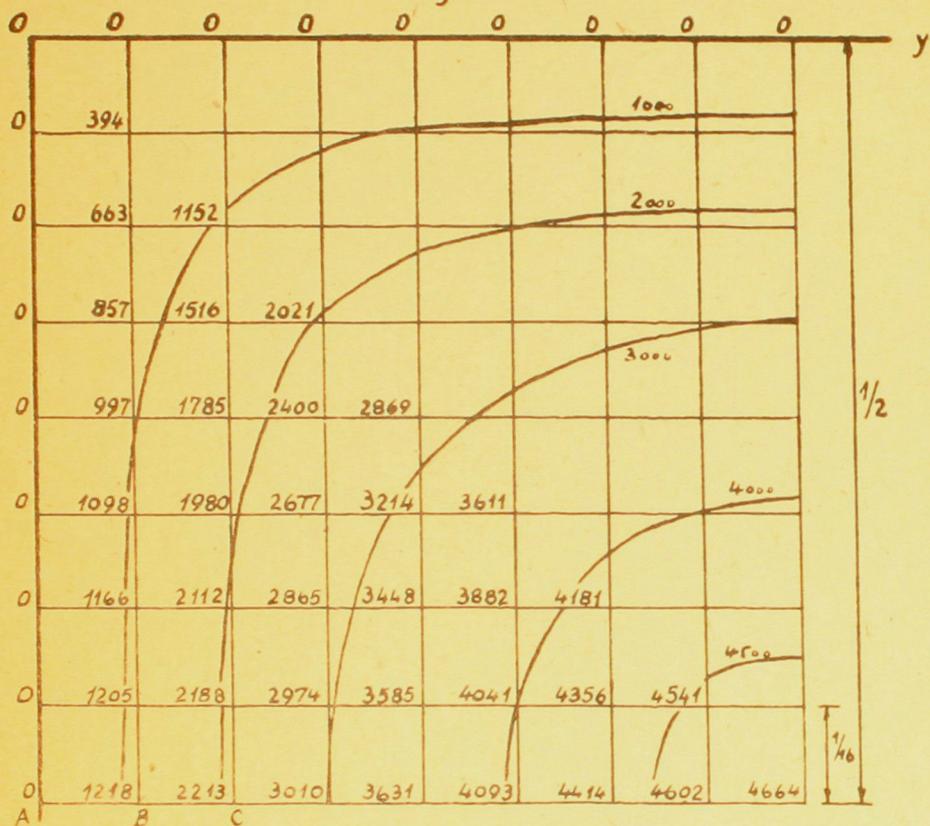
y la diferencia es menor de 1%.

Los ejemplos anteriores se han elegido por su sencillez. No se trata de problemas en que se pueda sacar todo el partido al método de relajación y no dudamos que hay métodos más adecuados para resolverlos.

El método de relajación encuentra su mejor campo de aplicación cuando las condiciones de borde son complicadas, como ser en ciertos problemas de aerodinámica, de hidráulica o de la teoría de la plasticidad, en que el borde mismo es desconocido y forma parte del problema determinarlo. En estos casos, el método se hace casi indispensable.

Hasta ahora, que sepamos, el método no ha sido aplicado a cuestiones en que intervenga la variable tiempo: transmisión del calor en régimen no perma-

Fig. 5



TORSIÓN DE UNA BARRA CUADRADA. -  
VALORES DE V MULTIPLICADOS POR 32.000.

nente, oscilaciones transientes de medios continuos, etc. Las aplicaciones a problemas tridimensionales son escasas; a este respecto, parece muy promisoría la combinación del método de relajación con el uso de «transforms». El transform permite eliminar una variable y reducir el problema tridimensional a la resolución de varios problemas bidimensionales.

### APENDICE

Exponemos a continuación, como se pueden obtener las expresiones aproximadas de las derivadas  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$  que aparecen en las ecuaciones 5a y 5b.

Supongamos una función  $y(x)$  que tiene los valores  $y_0, y_1, y_2$  en los puntos  $x = 0, x = h, x = 2h$ , respectivamente. Podemos buscar un polinomio que nos sirva para interpolar una función continua y derivable que tome los valores  $y_0, y_1, y_2$  en los puntos mencionados. Es fácil verificar que:

$$y = \frac{1}{2h^2} \left[ (x-h)(x-2h)y_0 - 2x(x-2h)y_1 + x(x-h)y_2 \right] \quad (15)$$

cumple las exigencias.

Derivando la expresión anterior obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2h^2} \left[ (2x-3h)y_0 - 4(x-h)y_1 + (2x-h)y_2 \right] \quad (16)$$

De donde, se obtienen los valores de la primera derivada para  $x = 0, x = h, x = 2h$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} \Big|_0 &= \frac{1}{2h} \left[ -3y_0 + 4y_1 - y_2 \right] \\ \frac{dy}{dx} \Big|_1 &= \frac{1}{2h} \left[ y_2 - y_0 \right] \\ \frac{dy}{dx} \Big|_2 &= \frac{1}{2h} \left[ y_0 - 4y_1 + 3y_2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

La primera de estas expresiones es la que se ha utilizado al evaluar  $\tau_{\text{máx}}$ , en la ecuación (13) del texto.

Derivando una vez más se tiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h^2} \left[ y_0 - 2y_1 + y_2 \right] \quad (18)$$

Mediante un cambio de notación, la ecuación anterior da las expresiones 5a y 5b.

No hace falta insistir en que las expresiones obtenidas son sólo aproximaciones, tanto más satisfactorias cuanto menor sea  $h$ .

Completaremos esta exposición calculando la expresión aproximada de  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$ .

Tenemos, de acuerdo con la segunda ecuación (17), (fig. 1):

$$2h \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_0 = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_1 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_3$$

y por la misma razón:

$$2h \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_1 = \Phi_a - \Phi_d$$

$$2h \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_3 = \Phi_b - \Phi_c$$

Luego:

$$4h^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_0 = \Phi_a - \Phi_b + \Phi_c - \Phi_d \quad (19)$$