Una aplicación del transform de Laplace

PROF. DGO. ALMENDRAS

1.—Se llama transform de Laplace de una función f(x) a la integral $\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx$ en que s es una variable real o compleja.

En un extenso campo de aplicaciones del operador anterior basta considerar s real y positivo.

Las condiciones de convergencia de la integral se estudian en cada caso particular o bien se pueden considerar ciertos tipos de funciones en que la convergencia está asegurada.

La técnica empleada en la resolución de problemas es la de todos los operadores, es decir, la de obtener los transform dadas las funciones y recíprocamente.

La formación de tablas de transfom, permite la determinación de las funciones respectivas o bien hay que decidirse por la resolución de una ecuación integral de la forma:

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = \varphi(s)$$

en que la incógnita es f (x).

Entre los transform más usados en los problemas de vibraciones y de conducción del calor en régimen variable tenemos los siguientes:

$$L \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{\frac{-k^2}{4x}} = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-k\sqrt{s}}$$

$$L \frac{1}{\sqrt{\pi x}} = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

$$Lx^{-3/2} e^{-\frac{k^2}{4x}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{k} e^{-k\sqrt{s}}$$

2.—*Aplicación del transform de Laplace a la ecuación de Bessel.*—La ecuación de Bessel $x^2 D^2 y + x Dy + (x^2 - n^2)\, y = 0$ se reduce a la forma simple

$$x^2 D^2 z + (1 - 2n)\, D z + x z = 0$$

$$x D^2 Z + (1 - 2n)\, D Z + x Z = 0$$

mediante la sustitución $x^n y = z$. Tomando L con $n > 0$ y $z(o) = 0$ se tiene:

1.—$L\, x^n J_n(x) = \dfrac{\Gamma(2n+1)}{2^n \Gamma(n+1)} \dfrac{1}{(s^2+1)^{\frac{2n+1}{2}}}$ · La constante C que figura en la integración se há hecho igual a $\dfrac{\Gamma(2n+1)}{2^n \Gamma(n+1)}$

Para utilizar la relación (1) recordemos que $\Gamma(n) = \int_o^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$ cuya convergencia se puede establecer para $n > 0$, determinemos:

$$\text{i) } L(x^{n-1}) = \int_o^\infty e^{-sx} x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)}{s^n}$$

$$\text{ii) } L(e^{-ax} x^{n-1}) = \int_o^\infty e^{-(a+s)x} x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)}{(a+s)^n} \quad ; \quad a + s > 0$$

De modo que: $\qquad L^{-1} \dfrac{\Gamma(n)}{(a+s)^n} = e^{-ax} x^{n-1}$

La relación (1) se puede poner en la forma:

$$L x^n J_n(x) = \frac{\Gamma(2n+1)}{2^n \Gamma(n+1)} \frac{1}{(s+i)^{\frac{2n+1}{2}}} \cdot \frac{1}{(s-i)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

$$= \frac{\Gamma(2n+1)}{2^n \Gamma(n+1) \left[\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right]^2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{(s+i)^{\frac{2n+1}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{(s-i)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

Aplicando la relación (i i), tenemos:

$$(2) \quad L x^n J_n(x) = \frac{\Gamma(2n+1)}{(2^n \Gamma n + 1) \left[\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right]^2} \cdot L e^{ix} x^{\frac{2n-1}{2}} \; L e^{-ix} x^{\frac{2n-1}{2}}$$

Por el teorema de «Composición de Borel», podemos poner:

$$x^n J_n(x) = \frac{\Gamma(2n+1)}{2^n \Gamma(n+1) \left[\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right]^2} \int_o^x e^{i(x-u)} (x-u)^{\frac{2n-1}{2}} e^{-iu} u^{\frac{2n-1}{2}} du$$

$$(3) \quad x^n J_n(x) = \frac{\Gamma(2n+1)}{2^n \Gamma(n+1)\left[\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)\right]^2} \int_0^x \frac{(x-u)^n u^n e^{i(x-2u)}}{\sqrt{u(x-u)}} du$$

Poniendo $u = x \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}$ y tomando sólo la parte real, obtenemos:

$$(4) \quad J_n(x) = \frac{\Gamma(2n+1) \qquad x^n}{2^{3n}\Gamma(n+1)\left[\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right]^2} \int_0^\pi \operatorname{sen}^{2n}\varphi \cos(x\cos\varphi)\, d\varphi \quad .$$

La parte imaginaria de la integral (3) es nula. En efecto:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^{2n}\varphi \operatorname{sen}(x\cos\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}\varphi \operatorname{sen}(x\cos\varphi) + \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}^{2n}\varphi \operatorname{sen}(x\cos\varphi)\, d\varphi$$

Haciendo el cambio de variable $\varphi = \pi - \psi$ la segunda integral se reduce a:

$$-\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}\psi \operatorname{sen}(x\cos\psi)\, d\psi \qquad \text{y}$$

luego:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^{2n}\varphi \operatorname{sen}(x\cos\varphi)\, d\varphi = 0$$

El coeficiente constante que figura en (4) se puede simplificar aplicando las identidades:

$$\tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \Gamma(\tfrac{3}{2}) \;;\; \tfrac{3}{2}\,\Gamma(^3/_2) = \Gamma(^5/_2) \quad ;\text{etc.}$$

Finalmente se tiene:

$$(5) \quad J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)} \int_c^\pi \operatorname{sen}^{2n}\varphi \cos(x\cos\varphi)\, d\varphi$$

Este resultado fué encontrado por Poisson y más tarde Lommel estableció su generalidad como solución de la ecuación de Bessel.

Para $n = 0$, tenemos:

$$J_o(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\, d\varphi$$

Para el estudio de los ceros de $J_n(x)$, partiendo de la fórmula (5) puede consultarse: «Theory of Bessel Functions», Watson.

Ejercicios: Establecer mediante el uso del transform los siguientes resultados:

1.— $\frac{d}{dx}(x^n J_n) = x^n J_{n-1}$

2.— $\frac{d}{dx}(x^n J_n) = -x^n J_{-n+1}$

3.— $J_{n-1} + J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n$

4.—Desarrollar $J_o(x)$ en serie potencial.