Desarrollo de Taylor y Laurent

Los operadores p^{-1} y $F(p)$ de Heaviside

Para la explicación de los métodos operacionales de Heaviside, Van der Pol Carson, etc., es necesario conocer los desarrollos de Taylor y Laurent de una función $f(z)$, siendo $z = x + yi$. Aunque estas materias se incluyen en nuestros cursos, no se puede hacer de ellas una práctica intensiva por falta de tiempo y por este motivo daremos aquí un tratamiento abreviado de lo indispensable. para comprender algunas fórmulas que son de uso corriente.

I. Desarrollo de Taylor.— Si la función $f(z)$ es holomorfa en la parte S del plano, encerrada por una curva C, de Jordán, sabemos que:

$$(1) \quad f(z_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)\,dz}{z - z_o}\text{, siendo } z_o \text{ un punto de S.}$$

Si a es otro punto de S y de modo que el círculo de centro a y radio $|z_o - a|$ quede en el interior de la región S, tendremos que $|z_o - a| \angle |z - a|$, siendo z un punto de la curva C. Entonces (1) se puede poner en la forma:

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)\left[1 - \dfrac{z_o - a}{z - a}\right]}$$

Como $\left|\dfrac{z_o - a}{z - a}\right| \angle 1$, se puede desarrollar en una serie convergente la fracción $\dfrac{1}{1 - \dfrac{z_o - a}{z - a}}$ · En efecto:

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z_o - a}{z - a}} = 1 + \frac{z_o - a}{z - a} + \left(\frac{z_o - a}{z - a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z_o - a}{z - a}\right)^{n-1} +$$

$$+ \frac{z - a}{z - z_o}\left(\frac{z_o - a}{z - a}\right)^n$$ y, evidentemente, el resto $r_n = \dfrac{z - a}{z - z_o}\left(\dfrac{z_o - a}{z - a}\right)^n$

tiende a cero si n tiende a ∞. Luego:

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)\,dz}{z-a} + \frac{z_o - a}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} + \dots +$$

$$+ \frac{(z_o - a)^{n-1}}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^n} + \frac{(z_o-a)^n}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)}{(z-z_o)\,(z-a)^n}\,dz$$

Sabemos que: $$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)\,dz}{z-a} = f(a)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} = f'(a)$$

....

....

$$\frac{p!}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{p+1}} = f^{(p)}(a)$$

entonces el desarrollo anterior se puede poner en la forma:

$$f(z_o) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(z_o - a) + \frac{f''(a)}{2!}(z_o - a)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z_o - a)^{n-1} + \frac{(z_o-a)^n}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_o)\,(z-a)^n}$$

Si $n \to \infty$ se puede probar que el módulo del último término tiende a cero. En efecto, sea:

$$R_n = \frac{(z_o - a)^n}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_o)\,(z-a)^n}$$

$|z_o - a|$ es una cantidad fija y $|z-a| > |z_o - a|$, es decir:

$$\left|\frac{z_o - a}{z-a}\right| \angle \rho \angle 1$$

y $$\left|\frac{z_o - a}{z-a}\right|^n \angle \rho^n$$

Luego: $|R_n| \angle \dfrac{\rho^n H L}{2\pi |z - z_o|}$ siendo: $|f(z)| \angle H$ y $\displaystyle\int_{C^+} |dz| = L$, largo de la curva C y como z_o es punto de la región S será $|z - z_o| > h$, luego,

$\left| R_n \right| < \dfrac{\rho^n H L}{2\pi h}$ · y $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = 0$, y, en consecuencia tendremos, finalmente:

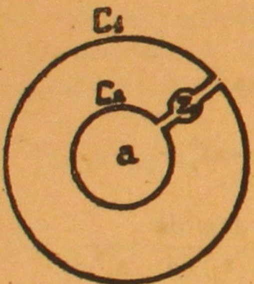
$$f(z_o) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(z_o - a) + \frac{f''(a)}{2!}(z_o - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z_o - a)^n + \ldots$$

Esta es la fórmula de Taylor.

Desarrollo de Laurent.

Si la función f (z) es holomorfa en la corona limitada por dos circunferencias de centro *a*, y z_o es un punto de dicha corona, entonces f (z_o) se puede expresar como suma de dos series potenciales, una en $z_o - a$. y la otra en $\dfrac{1}{z_o - a}$.

En efecto, $f(z_o) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_2^+} \dfrac{f(z)\,dz}{z - z_o} - \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1^+} \dfrac{f(z)\,dz}{z - z_o}$



Si z es de C_2, se tiene $|z - a| > |z_o - a|$

y si z es de C_1, se tiene $|z - a| < |z_o - a|$

Luego:

$$\text{a)} \quad \int_{C_2^+} \frac{f(z)\,dz}{z - z_o} = \int_{C_2^+} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)\left[1 - \dfrac{z_o - a}{z - a}\right]}$$

$$= \int_{C_2^+} \frac{f(z)\,dz}{z-a} + (z_o - a)\int_{C_2^+} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} + \ldots + (z_o - a)^n \int_{C_2^+} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} + \ldots$$

y análogamente:

$$\text{b)} \quad \int_{C_1^+} \frac{f(z)\,dz}{z - z_o} = -\frac{1}{z_o - a}\int_{C_1^+} f(z)\,dz - \frac{1}{(z_o - a)^2}\int_{C_1^+} (z-a) f(z)\,dz - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{(z_o - a)^n}\int_{C_1^+} (z-a)^{n-1} f(z)\,dz - \ldots$$

reemplazando a) y b) en la expresión de f (z), tenemos:

$$3) \quad f(z_o) = A_o + A_1(z_o - a) + A_2(z_o - a)^2 \ldots + A_n(z_o - a)^n + \ldots$$

$$+ \frac{B_1}{z_o - a} + \frac{B_2}{(z_o - a)^2} + \ldots + \frac{B_n}{(z_o - a)^n} + \ldots$$

Siendo:
$$A_o = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+} \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$
$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$
$$B_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+} (z-a)^{n-1} f(z)\,dz$$

El segundo miembro de (3) se llama desarrollo de Laurent de $f(z_o)$.

Un caso especial de desarrollo de Laurent de $f(z)$ es aquel en que esta función es holomorfa en el infinito y, entonces $|f(z)| \angle M$ para $|z| \angle \rho$ y

$$|A_n| \angle \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{2\pi R}{R^{n+1}} \quad ; R \searrow \rho$$

o $|A_n| \angle \dfrac{M}{R^n}$ y como se puede hacer R^n tan grande como se quiera, será $A_n = 0$. Para $a = 0$ el desarrollo (3) se reduce a:

$$f(z) = A_o + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \ldots\ldots \frac{B_n}{z^n} + \ldots\ldots$$ siendo z cualquier punto exterior a una circunferencia de cualquier radio y de centro en el origen.

III.—*Integrales de Bromwich y Carson.*

Supongamos una función holomorfa en el infinito:

$$(4) \quad F(z) = A_o + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \ldots\ldots + \frac{B_n}{z^n} + \ldots\ldots, \text{ siendo:}$$

$$(5) \quad B_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} z^{n-1} F(z)\,dz \qquad A_o = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{F(z)\,dz}{z}$$

La serie (4) será convergente si $|z| \searrow R$, de modo que si $|z| \geq \rho \searrow R$ será

$$|B_n| \angle \frac{1}{2\pi} \rho^{n-1} M \cdot 2\pi\rho \qquad \text{y } |F(z)| \angle M.$$

$$(6) \qquad |B_n| \angle M\,\rho^n.$$

Consideremos ahora la función:

$$(7) \quad f(x) = A_o + \frac{B_1 x}{1!} + \frac{B_2 x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{B_n x^n}{n!} + \ldots\ldots$$

«asociada» de la función F (z). Esta función es una serie entera uniformemente convergente para todo x, ya que:

$$\left|\frac{B_n x^n}{n!}\right| \angle \frac{M \rho^n |x|^n}{n!} \quad y \quad |A_o| \angle M$$

y
$$|f(x)| \angle M + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n |x|^n}{n!}$$

$$|f(x)| \angle M e^{\rho |x|}$$

Reemplazando B_n y A_o en (7) se tiene:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=o}^{\infty} \int_{C+} \frac{F(z)(zx)^n}{z \cdot n!} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C+} \frac{F(z)}{z} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(zx)^n}{n!} dz$$

(8)
$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C+} \frac{e^{zx} F(z)}{z} dz$$

Esta es la integral de Bromwich.

Recordando que $n! = \int_o^{\infty} e^{-t} t^n dt$ se tiene:

$$\int_o^{\infty} e^{-tx} t^n dt = \frac{n!}{x^{n+1}} \quad ; x > 0$$

Luego:
$$\frac{B_n}{x^n} = x \int_o^{\infty} e^{-tx} \frac{B_n t^n}{n!} dt$$

y haciendo la sumatoria de $n = 0$ a ∞, resulta:

(9)
$$F(x) = x \int_o^{\infty} e^{-tx} f(t) \, dt \quad \text{(Carson)}.$$

Las integrales (8) y (9) permiten resolver los problemas: dada la función $\frac{F(x)}{x}$, encontrar f (x), tal es el problema de la inversión de la integral y, dada f (x), encontrar F (x).

La integral que figura en el 2.° miembro de (9) es el transform de Laplace de la función f (t), de modo que la fórmula (8) permite calcular esta función, conocido su transform.

a) Sea $L f(x) = \dfrac{1}{s-a} = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$

entonces: $\dfrac{F(z)}{z} = \dfrac{1}{z-a}$

$$F(z) = \frac{z}{z-a}$$

Utilizando la fórmula (8) resulta:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{e^{zx}\, dz}{z-a}$$

El problema se limita al cálculo de Res (a) de $\dfrac{e^{zx}}{z-a}$ y tenemos:

$$\text{Res}(a) = \lim_{z \to a} e^{zx} = e^{ax} = f(x)$$

b) Si $L f(x) = \dfrac{1}{R^2 + s_2}$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{k^2 + z^2}$$

$$F(z) = \frac{z}{k^2 + z^2}$$

que tiene los polos $z_1 = k i$; $z_2 = -k i$. La integral (8) nos da:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C+} \frac{e^{zx}}{z^2 + k^2}\, dz$$

$$= \lim_{z \to ki} \frac{e^{zx}}{z + ki} + \lim_{z \to -ki} \frac{e^{zx}}{z - ki}$$

$$= \frac{e^{xki} - e^{-xki}}{2ki}$$

$$f(x) = \frac{1}{k} \operatorname{sen} k x$$

IV.—*Operador p^{-1} y $F(p)$ de Heaviside.*

Heaviside utiliza la notación $p^{-1}\, g(x) = \dfrac{1}{p}\, g(x) = \int_0^x g(t)\, dt$, el cual aplicado reiteradamente conduce a la fórmula de Cauchy.

11. $$\frac{1}{p^n}\, g(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}\, g(t)}{(n-1)!}\, dt$$

Si $g(x) = 1$ se tiene:

$$\frac{1}{p^n}\, g(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}\, dt}{(n-1)!} = \frac{x^n}{n!}$$

De (11) se deduce, siendo $|g(t)|$ acotada e integrable:

12. $$\left| \frac{1}{p^n}\, g(x) \right| < \frac{M_1 |x|^n}{n!}, \text{ si } |g(t)| < M_1 \text{ en } (0,x)$$

Con respecto al operador $F(p)$ tenemos el siguiente teorema:

$F(p)$ tiene un sentido si $F(z)$ es holomorfa en el infinito y $|g(x)|$ es acotada e integrable en $(0,x)$".

Dm.— Si $f(z)$ es holomorfa en el infinito, tenemos:

$F(z) = A_o + \dfrac{B_1}{2} + \dfrac{B_2}{z^2} + \dots\dots\dots + \dfrac{B_n}{z^n} \dots\dots\dots$ y la aplicación del operador $F(p)$ a la función $g(x)$ implica la del $\dfrac{B_n}{p^n}$, lo que da:

13. $$\frac{B_n}{p^n}\, g(x) = B_n \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}\, g(t)}{(n-1)!}\, dt$$

$$\left| \frac{B_n}{p^n}\, g(x) \right| < M \rho^n M_1 \frac{|x|^n}{n!} \quad \text{(Fórmulas 6 y 12).}$$

De modo que: $|F(p)\, g(x)| < M M_1\, e^{\rho |x|}$, lo que significa que $F(p)\, g(x)$ tiene un sentido.

Para tener un significado preciso de $F(p)\, g(x)$, consideramos la función asociada de $F(z)$:

14. $$f(x) = A_o + \frac{B_1 x}{1} + \frac{B_2 x^2}{2!} + \dots\dots + \frac{B_n x^n}{n!} + \dots\dots$$

Entonces en (13), haciendo la sumatoria con respecto a n, se tiene:

$$F(p)\, g(x) = A_o g(x) + \int_o^x \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_1^\infty \int_{C^+} \frac{F(z)\,[(x-t)\,z]^{n-1}}{(n-1)!}\, dz\right] g(t)\, dt$$

$$= A_o\, g(x) + \int_o^x g(t)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} F(z)^{(x-t)z}\, dz\right] dt$$

La integral $\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} F(z)\; e^{(x-t)z}\, dz$ se obtiene de la fórmula 8, derivando con respecto a x, y reemplazando x por $x - t$, por consiguiente:

$$F(p)\, g(x) = A_o g(x) + \int_o^x f'(x-t)\, g(t)\, dt$$

De (14) tenemos $A_o = f(0)$, y finalmente:

15. $$F(p)\, g(x) = f(o)\; g(x) + \int_o^x f'(x-t)\, g(t)\, dt$$

Veamos una aplicación: Determinar $\frac{p}{1+p}\; e^{2x}$

La función $F(z)$ es aquí $\frac{z}{1+z}$ y la determinación de $\frac{p}{1+p} e^{2x}$ se puede hacer desarrollando $\frac{p}{1+p}$ en la forma $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^n}$

Luego:

$$\frac{p}{1+p}\, e^{2x} = e^{2x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_o^x \frac{(x-t)^{n-1}\, e^{2t}}{(n-1)!}\, dt$$

$$= \frac{2}{3}\, e^{2x} + \frac{1}{3}\, e^{-x}$$

Para aplicar la fórmula 15 debemos determinar $f(x)$ mediante la ecuación 8.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{e^{zx}}{1+z}\, dz = \lim_{z \to -1} e^{zx} = e^{-x}$$

$$f'(x-t) = -e^{t-x}\; ; \; f(o) = 1$$

Luego:

$$\frac{p}{1+p}\, e^{2x} = e^{2x} - \int_0^x e^{(t-x)}\, e^{2t}\, dt$$

$$= \frac{2}{3}\, e^{2x} + \frac{1}{3}\, e^{-x}$$

Las condiciones de aplicación del operador D^{-1} y en general de $\varphi(D^{-1})$ son las mismas del operador p^{-1} y $F(p)$.